ПРОБЛЕМА КОНСТРУКТИВНОСТИ НАУЧНОГО И ФИЛОСОФСКОГО ЗНАНИЯ

сборник

статей

Выпуск второй

Курск

2003

КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРОБЛЕМА КОНСТРУКТИВНОСТИ НАУЧНОГО И ФИЛОСОФСКОГО ЗНАНИЯ

СБОРНИК СТАТЕЙ

ВЫПУСК ВТОРОЙ

КУРСК
2003

ББК 87.3
П 78

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Курского государственного университета

П 78
Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск второй / Предисловие В.Т. Мануйлова. - Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2003. – 133 с.
ISBN 5-88313-406-5

Статьи сборника объединены общей темой исследования: конструктивность физико-математического знания в историко-философском аспекте. Сборник рекомендуется специалистам по философии и методологии науки, истории науки и философии; он может быть использован преподавателями, аспирантами и студентами вузов при изучении проблем истории, философии и методологии науки.

ББК 87.3

Ответственный редактор – кандидат философских наук, доцент **В.Т. Мануйлов**

ISBN 5-88313-406-5

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Вниманию читателей предлагается второй выпуск сборника статей, содержащий результаты исследований в рамках реализации плана работ по проекту РФФИ «Конструктивность физико-математического знания в историко-философском аспекте». Первый выпуск сборника вышел в 2001 году[1]. В настоящем выпуске продолжена публикация материалов исследований, направленных на решение фундаментальной научной проблемы на стыке истории философии и философии и методологии науки, связанной с проведением комплексных теоретических исследований взаимосвязи собственно физико-математических, общенаучных и общефилософских методов и подходов в истории европейской науки и философии.

Основное содержание сборника составляют результаты исследований исполнителей гранта РФФИ, проекта №01-06-80278. Кроме того, в сборнике помещена статья ныне покойного профессора МГУ им. М. В. Ломоносова Ю. А. Петрова, переданная автором для публикации редактору данного сборника в начале 90-х годов.

В статье Е. И. Арепьева «О философско-математических аспектах логико-семантических исследований Р. Карнапа» обсуждаются вопросы, связанные с истолкованием природы математических истин на основе логико-лингвистического анализа. Рассматриваются концепции одного из крупнейших представителей аналитической философии математики XX века, участника «Венского кружка» и одного из основоположников «семантического направления» в философии науки – Р. Карнапа, являющиеся развитием исследований Г. Фреге. Обосновывается тезис, согласно которому логико-семиотические построения Р. Карнапа, несмотря на отрицание им осмысленности метафизической проблематики, вносят значимый вклад в разработку онтологического и гносеологического фундамента математического знания.

Статья А.В. Кузнецова «Принципы симметрии и системности в синтезе физической картины мира» посвящена рассмотрению принципов конструирования понятийных систем, которые выполняют роль общих логических и методологических форм

[1] Проблема конструктивности научного и философского знания: Сб. ст.: Выпуск первый/ Предисловие В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. пед. ун-та, 2001. – 115 с.

синтеза физической картины мира на протяжении XX столетия. В качестве таких принципов анализируются принципы симметрии и системности. Рассматривается генезис этих принципов, их философское происхождение, их конкретизация в структуре фундаментальной физической теории и последующее превращение в методологические принципы синтеза физической картины мира. Отмечается конструктивная роль принципов симметрии и системности в процессе обоснования физического знания на эмпирическом и теоретическом уровне.

В статье руководителя проекта В. Т. Мануйлова «Конструктивность канторовской «наивной» теории множеств» выявляются конструктивные компоненты в творчестве основателя теоретико-множественного направления в математике. Конструктивизм в математике традиционно рассматривается как антитеза теоретико-множественному обоснованию математического знания. В статье показано, что в структуре канторовской «наивной» теории множеств может быть выделена часть (теория трансфинитных ординальных чисел), при обосновании которой используются генетические методы введения объектов теории (три «принципа порождения»), аналогичные методам, используемым сторонниками конструктивизма в математике, что позволяет говорить о «конструктивной» части канторовской «наивной» теории множеств и о конструктивности ее. Указывается отличие «канторовской конструктивности» от традиционных видов конструктивности, выделяются гносеологические основания этого вида конструктивности.

Статья В.В. Мороз «Философско-математический синтез в контексте проблем оснований математики в философии XX века» посвящена выявлению роли идеи философско-математического синтеза в становлении и развитии основных направлений в философии математики XX века. Проводится сравнительный анализ главных направлений в основаниях математики, сформировавшихся в результате очередного кризиса математических основ, выявляются типы взаимосвязи философии и математики в этих направлениях. Обосновывается тезис о том, что с позиции идеи философско-математического синтеза аналитическая и конструктивная философии математики рассматриваются не как исключающие друг друга, а как взаимосвязанные и взаимодополняющие тенденции в современной духовной культуре.

Статья Ю.А. Петрова «Роль философии в обосновании математики» помещена в данном сборнике на том основании, что в ней излагаются идеи и подходы, стимулировавшие исследования участников проекта РФФИ. Ю.А. Петров является одним из основоположников исследований по философским основаниям математического знания в отечественной науке. В его работах: «Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости – М.: Наука, 1967», «Математическая логика и материалистическая диалектика – М.: МГУ, 1974», «Методологические вопросы анализа научного знания. – М.: Высшая школа, 1977» и др. вводятся термины, вошедшие в вокабулярий современных отечественных исследователей в области философских оснований теоретического и, в частности, математического знания. В статье Ю. А. Петрова, помещенной в данном сборнике, рассматривается роль философии в обосновании математического знания. Вводятся понятия гносеологического и семиотического обоснования математики. Проводится различие между качественными и количественными отношениями в объективной реальности. Различаются содержательные и формальные математические теории. Определяются непосредственный и опосредованный предметы содержательной математической теории. Рассматриваются программы теоретико-множественного, логицистского, формалистского, интуиционистского и конструктивистского обоснования математики, выясняются их цели, границы; намечаются пути построения диалектической концепции обоснования математики.

Примечания к статьям сборника сделаны постранично. Библиография в конце статей. Статьи снабжены резюме, помещенными в начале каждой статьи.

Сборник может быть полезен специалистам по философии и методологии науки, истории науки и философии; он может быть использован преподавателями, аспирантами и студентами вузов при изучении проблем истории, философии и методологии науки.

Арепьев Е. И.
(Курск)

О ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ Р. КАРНАПА*

Резюме

Статья посвящена обсуждению вопросов, связанных с истолкованием природы математических истин на основе логико-лингвистического подхода. В ней рассматриваются воззрения представителя аналитической философии математики – Р. Карнапа, служащие развитием и продолжением изысканий Г. Фреге. В статье обосновывается также, что, несмотря на отрицание Карнапом осмысленности метафизической проблематики, логико-семантические построения этого мыслителя вносят значимый вклад в разработку онтологического и гносеологического фундамента математического знания.

Идеи Витгенштейна, и особенно идеи, разрабатываемые им в «Логико-философском трактате», оказали большое влияние на труды представителей Венского кружка. Членом этого кружка являлся и Рудольф Карнап, работы которого продолжают традицию аналитического подхода к философско-математической проблематике.

Философия науки, по мнению Карнапа, должна представлять собой анализ языка научных теорий с целью экспликации основополагающих понятий – понятий истинности, причинности, вероятности и т.д. Уточнение же этих исходных положений позволит исследовать саму структуру и процесс развития научного знания.

Ранний период творчества Рудольфа Карнапа, связанный с участием в работе Венского кружка, характеризуется стремлением использовать аппарат математической логики для исследования понятийного фундамента отдельных теорий физики, математики и лингвистики. По существу, этот период в философско-математическом аспекте представляет собой ряд исследований, развивающих и интерпретирующих сходную с логицистской концепцию математического знания, проецируемую на отдельные области математики.

Далее, с начала 30-х годов XX века, Карнап исследует результаты в области логики, полученные Расселом и Уайтхедом, анализируя их в свете теоремы К. Геделя о неполноте, и приходит

* Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 01-06-80278

к выводу о необходимости развития теории логического синтаксиса. Он осуществляет построение логического языка, представляющего собой часть металогики. Эти построения основываются на тезисе, согласно которому логика науки является синтаксисом языка науки.

Развитие взглядов Карнапа в дальнейшем характеризуется тем, что, разрабатывая проблемы, относящиеся к построению унифицированного языка науки, он приходит к выводу о необходимости помимо синтаксического подхода учитывать при анализе языка науки семантический аспект. В качестве основного способа реализации этого требования Карнап видит построение искусственного языка, приближающегося по своим характеристикам, в частности способности выражения, к естественному, но позволяющего вводить строгие определения основополагающих (семантических) понятий.

Творческая деятельность Рудольфа Карнапа перекликается в идейном, в первую очередь методологическом, плане как с языковыми исследованиями Готлоба Фреге, так и со взглядами Рассела и Витгенштейна. Философия математики Карнапа имеет лингвистический уклон, и в то же время значимую роль в ней играет логика. Это позволяет отнести творческое наследие данного мыслителя к аналитической философии математики, – как характеризующееся прежде всего логико-лингвистической направленностью исследований.

При рассмотрении вопроса об онто-гносеологических аспектах фундамента научных теорий Карнап пытается разработать единую теорию смысла и значения. Разделяя три типа областей исследования, он вводит девять категорий объектов исследования. Первая область – область лингвистических объектов (десигнаторов) – включает в себя три категории: индивидуатор, предикатор и декларативное предложение. Вторая область – это область экстралингвистических реальных объектов, или область экстенсионалов, включающая в себя категории индивидов, классов индивидов и категорию логической валентности. И наконец третья область – область экстралингвистических ментальных объектов (интенсионалов), в которую входят категории индивидуальных концептов, предикатных концептов (то есть свойств или отношений) и суждений.

Любое лингвистическое выражение, к которому применим семантический анализ, является десигнатором. Другими словами, десигнаторы, по Карнапу, – это те языковые выражения, для которых в метаязыке существуют переменные.

Понятие истины в системе Карнапа существует только в отношении предложений. Эквивалентность десигнаторов означает, что они имеют один экстенсионал (реальный объект, сопоставленный им). Карнап вводит также понятие L-эквивалентности, которое означает, что десигнаторы имеют один интенсионал (ментальный объект). Вообще, приписывание десигнатору L-свойства означает, что это свойство присуще ему лишь в силу синтаксических правил, независимо от внеязыковых фактов. Из такого толкования L-свойств вытекает очевидным образом, что L-истинность предложения, в понимании Карнапа, есть то же самое, что и аналитическая истинность в классическом понимании.

Предложение, говорит Карнап, может быть экстенсиональным и интенсиональным относительно входящего в него десигнатора. Это зависит от последствий замещения десигнатора на эквивалентный и L-эквивалентный ему. Относительно входящего в него десигнатора предложение называется экстенсиональным, если замещение входящего в него десигнатора на эквивалентный ему десигнатор преобразует данное предложение в эквивалентное самому себе. В этом случае экстенсионал предложения выступает в качестве функции экстенсионала десигнатора.

Если же предложение не экстенсионально и если замещение входящего в него десигнатора на L-эквивалентный ему преобразует всё предложение в L-эквивалентное ему предложение, то предложение называют интенсиональным относительно входящего в него десигнатора. Тогда интенсионал предложения является функцией интенсионала входящего в него десигнатора.

Базисный язык S в теории Карнапа включает в себя логические связки: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и подобие; индивидуальные переменные – x, y, z; кванторы; операторы дескрипции (присвоения значения, описания состояния) и абстракции. Универсум этого языка содержит бесконечное число индивидуальных констант и конечное число предикатных констант разных уровней и степеней.

Язык S считается полностью заданным, если заданы правила построения допустимых предложений, даны определения индивидных констант и предикатов, заданы правила определения в рекурсивной форме (определение по индукции, имеющее форму системы равенств) и даны правила определения областей.

Карнап вводит также понятие атомарного предложения, под которым понимает выражение, состоящее из примитивных n-местных предикатов и n индивидных констант. Схемой предложения может служить либо само предложение, либо предложение, полученное из исходного заменой индивидных констант на переменные. В языке S предложения не должны содержать свободных переменных, то есть являются замкнутыми.

Карнапом вводится и понятие F-истинного предложения, под которым понимается истинное предложение, истинность которого не усматривается только из одних семантических правил системы. Он также дает внеэмпирический критерий истинности атомарного предложения, согласно которому атомарное предложение истинно в некотором описании состояния тогда и только тогда, когда оно входит в это описание, то есть входить в описание состояния для атомарного предложения означает быть истинным в нем. Термином же «описание состояния в языке S» обозначается класс предложений из S, который включает в себя всякое атомарное предложение либо его отрицание (в смысле строгой дизъюнкции).

Введение понятия описания состояния позволяет Карнапу уточнить и расширить понятие L-истинности предложения: предложение считается L-истинным, если и только если оно выполнимо во всех описаниях состояния. Представляя таким образом аналитически истинные предложения, Карнап пытается разработать теоретический подход к исследованию языка науки, в частности математики.

Из уточнения определения L-истинного предложения вытекают следующие определения. Предложение называется L-ложным, если оно не выполняется ни в одном описании состояния. Предложение L-детерминировано в том случае, если оно является либо L-истинным, либо L-ложным. Недетерминированное, или фактическое предложение – это предложение, для которого существует описание состояния, где оно выполняется, и описание состояния, где оно не выполняется.

Исследование понятия истинности, осуществленное Карнапом, выявляет также два различных рода аналитической истины: «общезначимая истина» и «истина по определению». Карнап соглашается с тем, что принято различать A-истины (логические, необходимые) и F-истины (эмпирические, фактуальные), причем A-истины подразделяются на два вида: на логические истины в собственном смысле слова и на синонимические истины (истины, основанные на синонимии или нелогических определениях). Это позволяет подойти к более глубокому пониманию математических истин.

Понятие L-эквивалентности у Карнапа является необходимым в его трактовке сущности суждения. Суждения, говорит он, – это такие особого рода объекты, для которых выполняется, что каждому предложению в языке S по правилам этого языка соотносится только одно суждение и что один объект этого рода (т.е. суждение) относится к двум и более предложениям только в том случае, если они L-эквивалентны[2].

Вышеизложенные положения концепции, разрабатываемой Карнапом, указывают на его стремление реализовать идеи Г.В. Лейбница путем совершенствования естественного языка логико-семантическими и синтаксическими средствами с целью применения усовершенствованной языковой системы в различных областях научного знания.

Метод, который использует Карнап, предполагает получение результатов благодаря семантическому анализу значения. «Он (метод) применяется к тем выражениям семантической системы S, которые мы называем десигнаторами (designators); они включают декларативные (то есть повествовательные) предложения, индивидные выражения (то есть знаки постоянных индивидов или дескрипции индивидов) ...»[3].

Исследования Карнапа во многом перекликаются с разработками Готлоба Фреге. Карнап указывает, что применяет для исследования языковых систем тот метод, который предложил Фреге для интерпретации индивидных дескрипций в случаях неединственности. Этот метод заключается в том, что выбирается раз навсегда единственный индивид, рассматриваемый в дальнейшем как дескрипт для таких случаев.

Логическая структура естественного языка, как указывает Фреге (и Карнап с ним вполне согласен), обладает рядом дефектов, один из которых заключается в том, что в некоторых случаях выражение грамматической формы «тот, который...» является именем одного объекта, а в других случаях – не является. В терминологии Карнапа это означает, что некоторые дескрипции имеют дескрипт, а другие не имеют.

---

[2] В рассмотрении вопроса о разработке Карнапом теории смысла и значения и исследовании понятий истинности и эквивалентности использованы результаты работы А.А.Кузьмичевой см.: Кузьмичева А.А. Лингвистическая доктрина логической и математической истины Рудольфа Карнапа. - Иркутск, 1982. - С. 2-8, 12-13.

[3] Карнап Р. Значение и необходимость. - М., 1959. - С. 27.

Карнап излагает некоторые положения языковых исследований Фреге как бы подходя к изложению своих идей, которые являются развитием и расширением фрегевских. Он говорит о положении Фреге, согласно которому правила языковой системы были сконструированы таким образом, чтобы каждая дескрипция имела дескрипт. Для реализации этого положения требуются некоторые соглашения, носящие достаточно произвольный характер, но, отмечает Карнап, этот недостаток вполне оправдывается преимуществом простоты, которое приобретает система благодаря такому изменению ее правил. Так, говорит он, вывод единичного предложения из общего и экзистенциальные обобщения сохраняются в этом случае и для дескрипций (что невозможно без изменения правил).

Способ выполнения требования Фреге зависит от особенностей языковой системы и от области значений соответствующих переменных. Карнап указывает на то, что Фреге строит систему без различия в типах между индивидами и классами, то есть в системе Фреге как классы, так и их элементы являются предметами (objects), или значениями индивидных переменных. Любой из дескрипций, не удовлетворяющих условию единственности, Фреге сопоставляет в качестве дескрипта класс тех объектов, которые удовлетворяют ее матрице. Благодаря этому различные дескрипции подобного рода будут иметь различные дескрипты. Карнап же предлагает более простую процедуру, которая состоит в выборе единственного объекта из области значений соответствующих переменных и определении его в качестве дескрипта для всех дескрипций, не удовлетворяющих условию единственности.

Таким образом, концепция Р. Карнапа, в частности его философско-математические воззрения, тесно связаны с исследованиями Г. Фреге, посвященными построению формально-логической системы оснований арифметики и разработками, относящимися к проблемам языка науки. Карнап пытается развить результаты, полученные на раннем этапе аналитической философии математики. Несмотря на его отрицание осмысленности метафизической проблематики, этот мыслитель вносит значимый вклад в разработку онто-гносеологических вопросов математического знания, выражающийся в конкретизированном обосновании аналитической, то есть априорной природы математических истин.

А. В. КУЗНЕЦОВ
(*Курск*)

ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ И СИСТЕМНОСТИ В СИНТЕЗЕ ФИЗИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ МИРА *

Резюме

В статье рассматриваются принципы конструирования понятийных систем, которые выполняют роль общих логических и методологических форм синтеза физических знаний на протяжении последнего столетия. В качестве таких принципов выделяются принципы симметрии и системности. В статье анализируется генезис этих принципов, их философское происхождение, их конкретизация в структуре фундаментальной физической теории и последующее превращение в методологические принципы синтеза физической картины мира. Отмечается конструктивная роль принципов симметрии и системности в процессе обоснования физического знания на эмпирическом и теоретическом уровне.

Выявление сущностного фундамента синтеза физической картины мира на основе обобщения результатов философии науки и техники подразумевает необходимость теоретического описания, классификации и систематизации методологических принципов и установок, играющих активную роль в развитии физического знания.

Генетическая и онто-гносеологическая связь принципов с конкретным содержанием научной теории, их синтетическая функция в процессе роста научного знания находит свое выражение в том, что достигнутое знание, реализующееся в интегрированных определениях, фактах, понятиях, законах, содержится в принципах как бы в свернутом виде. Так, например, принцип сохранения связывает в единое целое все законы сохранения, принцип симметрии – законы симметрии и сохранения.

Становление всеобщих методологических принципов синтеза физической картины мира происходит на основе синтеза исходных принципов построения теоретического физического знания. При этом область связанных между собой исходных

* Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 01-06-80278

принципов представляет собой область физической картины мира. Близкими, практически тождественными понятию «исходный принцип» являются понятия «фундаментальная идея теории», «основная идея теории», «фундаментальный принцип» и «руководящая идея». Например, в термодинамике исходные принципы фиксируются в двух «началах»: первое выражает существование отношения эквивалентности между разными видами энергии (или невозможности perpetuum mobile первого рода); второе есть обобщение эмпирически обнаруживаемых фактов самопроизвольного одностороннего перетекания теплоты от более нагретого тела к менее нагретому до выравнивания температур при соприкосновении тел (или невозможности perpetuum mobile второго рода). Содержание теории относительности определяется исходным принципом относительности[1] и исходным принципом постоянства скорости света[2]. Таким образом, в системе исходных принципов фундаментальной физической теории сосредоточены смысл и значимость физической картины мира. Согласно данному строю мыслей, Н. В. Овчинников пишет: «Фундаментальные принципы научного знания с одной стороны – это исходные принципы теории, а с другой – общие законы природы»[3]. Здесь исходный принцип или руководящая идея теории – это основополагающее положение, вокруг которого группируются все другие элементы теории, и одновременно исходный материал для формирования общих методологических принципов синтеза физической картины мира.

Не у всякого знания, выступающего в виде принципа, одинаковая научная ценность. Иногда в виде принципа выступают и такие положения, которые не являются научной истиной. Таковыми являются, например, ложные, религиозные, идеалистические принципы. Использование этих положений как принципов объясняется существующими заблуждениями, стереотипами, определенной мировоззренческой установкой (в античной натурфилософии, в частности у Аристотеля, подобные установки нашли свое отражение в делении мира на совершенный космос и несовершенный земной мир; в априорном принципе

---

[1] Прим.: обобщение факта инвариантности законов природы в инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.
[2] Прим.: обобщение факта независимости скорости света от движения источника.
[3] Овчинников Н. Ф. Тенденция к единству науки: познание и природа. – М.: Изд.-во АН СССР, 1988.– С. 143.

круговых орбит небесных тел; в натурфилософском принципе «природа боится пустоты» и т.д.). Неадекватность таких мировоззренческих установок устраняется действием регулятивной функции принципа, проявляющейся в практическом определении соответствия принципов объективной реальности, когда они «становятся методом научно-теоретического познания и практического действия человека»[4]. Иными словами, подлинная значимость принципа определяется его объективным содержанием. Таким образом, имеющаяся совокупность законов и фактов становится конструктом физической картины мира только тогда, когда они определенным образом связаны и выражены в теории; но сами «теории являются истинными или ложными в зависимости от того, каков мир»[5] (классическая механика ложна наподобие теории Птолемея, опровергнутой Коперником; все теории ложны, если не соответствуют реальности[6]; не только теория, но и вся «наука погрешима, ибо она создание рук человеческих»[7]), обеспечивая, таким образом, исходным принципам определенную нормативность. Понятие нормы в данном случае выглядит как понятие меры – меры допущения, меры ограничения, смысл которых обнаруживается в запретах. В физической картине мира такого рода запрет накладывается на экстраполируемость принципов в еще не изученную область и реализуется в определении их границ применимости. Поскольку категория «физическая картина мира» имеет метатеоретический статус, в ее рамках принципы приобретают иное методологическое значение, чем в рамках физических теорий, выполняя по отношению к ним функции метаязыка; здесь экстраполируемость исходных принципов фундаментальной физической теории в область философии понимается как распространение экстенсионала этих принципов за пределы предметной области фундаментальной физической теории. Например, если мы говорим о механистической картине мира, то это означает, что Мир предстает перед исследователем как совокупность механических процессов, представленных в соответствующих принципах. То есть «системы [исходных – *А. К.*]

---

[4] Копнин П. В. Проблемы диалектики как логики и теории познания//Избранные философские работы. – М., 1982. – С. 357

[5] Философские проблемы естествознания/С.Т.Мелюхин, Ю.А. Петров, Г. И. Рузавин и др.; Под ред. С.Т.Мелюхина. – М.: Высшая школа, 1985. – С. 143.

[6] Там же, С. 83

[7] Поппер К. Логика и рост научного знания. – М.: Прогресс, 1983. – С. 123.

принципов образуют такие фокальные понятия (по аналогии с понятием «фокальная точка оптической системы»), которые являются той «фокусирующей клеточкой», в которой сосредоточены смысл и значимость данной картины мира»[8]. Сама же физическая картина мира выступает как интенсионал, разворачивая данное «фокальное понятие» в систему содержательных утверждений. Воспользовавшись этим сравнением отметим, что при рассмотрении основных категорий физической картины мира в их логико-семиотической функции как десигнаторов подобная «фокусировка» должна осуществляться посредством некоторой «гносеологической призмы»; поэтому истинность теории прямо и непосредственно зависит не только от мира, но и от «свойств» преломляющей призмы[9], – то есть от упрощений и идеализаций, принятых в конкретной фундаментальной теории, лежащей в основе данной физической картины мира. Законы Ньютоновой механики будут истинны при тех идеализациях[10], которые обусловливают применимость ее законов, например, при условии бесконечной скорости передачи взаимодействий. При изменении этой идеализации они будут ложны, а стало быть, будет ложна и теория Ньютоновой механики. При иных идеализациях будут истинны иные законы и иные механики. Именно эта мысль содержится в утверждении Гейзенберга о том, что рассматриваемая физическая картина мира, по сути, является «не картиной природы, а картиной наших отношений к природе»[11]. «Поэтому разделение мира на объективный ход событий в пространстве и времени, с одной стороны, и душу, в которой отражаются эти события, – с другой, иначе говоря, картезианское различение res cogitans и res extensa, уже не может служить отправной точкой в понимании логического конструирования физической картины мира»[12]. Здесь проявляется синтетическая функция исходного принципа, заключающаяся не только в познании объективных процессов, но и в осмыслении,

[8] Бляхер Е. Д., Волынская Л. М. «Картина мира» и механизмы познания. – Душанбе: Ирфон, 1976. – С. 49.
[9] Подобно тому, как отсутствие зрения вообще делает невозможным адекватное наличное определение объектов зрения. – А. К.
[10] См. Петров Ю. А. Гносеологический подход к эффективизации понятия физической реальности // Вестник Московского университета. – М., 1996. – Сер. 7. – Философия.
[11] См. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое/ Пер. с нем. – М.: Наука, 1989. – 399 с.
[12] Гейзенберг В. Шаги за горизонт: Сборник / Пер. с нем. – М.: Прогресс, 1987. – С. 303-304.

оценке другого знания посредством принятия адекватных мировоззренческих установок. В этой функции по своей логической форме исходный принцип функционирует в качестве «гносеологической призмы», что позволяет фиксировать такие идеализации, которые принимаются, когда теория интерпретируется как отражение какой-либо области реальности или выражение какого-либо процесса мышления. Поэтому современный синтез физической картины мира должен предшествовать возникновению новых физических теорий (объясняющих научные факты), так как исходные принципы, которые заложены в основание новых физических теорий, служат элементами (конструктами) физической картины мира. Таким образом, посредством исходного принципа как своеобразной общей посылки дедуктивного умозаключения (реализацией которой являются конкретные факты, законы и другие принципы), целостность мира начинает воспроизводиться логически, в то время как в результате саморефлексии и самоизоляции отдельных знаний историческая целостность утрачивается. Поэтому, в отличие от исторически первой механистической картины мира, которая во многом была картиной мира в обыденном смысле этого слова, современная физическая картина мира, при сомнительной действительности ее целостного взгляда на мир, становится предметом логического конструирования, выражающего наиболее синтетическое знание о физических явлениях на данном этапе развития физики.

Рост физического знания с необходимостью предполагает и процесс развития принципов. Как отмечалось А. Эйнштейном: «принцип относительности, или, точнее, принцип относительности вместе с принципом постоянства скорости света следует понимать не как «замкнутую систему», и не систему вообще, а только как некий эвристический принцип, сам по себе содержащий лишь высказывания о твердых телах, часах и световых сигналах»[13]. В зависимости от исторически конкретной ситуации происходит изменение роли того или иного принципа в процессе построения теории. Так, синтез принципа относительности и принципа постоянства скорости света потребовал изменения всей системы пространственно-временных представлений. Синтезирующие принципы новой физической

---

[13] Эйнштейн А. Основы общей теории относительности//Он же. Собр. научн. трудов. – Т. 1. – М.: Наука, 1967. – С. 50-51.

картины мира, не будучи результатом логического вывода в рамках старой фундаментальной физической теории, непосредственно обусловлены данными опыта. Хотя сам опыт исторически ограничен и по точности, и по глубине проникновения в сущность явлений, и по широте их охвата как в количественном, так и в качественном отношении, само ограничение шаг за шагом устраняется в ходе научного познания.

В этом смысле следует отметить бесспорное различие между ролью исходных принципов в реально развивающемся процессе физического познания и их функционированием в качестве постулатов, лежащих в логическом фундаменте аксиоматизированной теории, в которой когнитивная и логическая функции принципа выступают на первый план. Ведь, с одной стороны, истинное знание является адекватным отражением в сознании познаваемого объекта, с другой стороны, истинное знание – результат сознательной познавательной деятельности. В качестве не непосредственной, а конструируемой сознанием мысленной целостности физическая картина мира переходит уже в инобытие, то есть не схватывается непосредственно сознанием, а специально формируется в голове синтезирующего мир мыслителя (посредством логико-гносеологических операций), и даже превращается там в идеал, конструируемый отчасти в формах своих интенций. Физика интересует теперь **не мир, проявляющийся в вещах**, а **картина мира в ее отношении к миру в себе**, что, по сути, свидетельствует о несостоятельности традиционной натурфилософии в качестве онтологического основания физической науки. Такая «деонтологизация» приводит к новой точке кульминации и к переходу от «статического» к «генетическому» конституированию, в котором стремление отождествить сознание с синтезом, с требованием единства, очень кантианское в своей основе, требует специального логико-гносеологического обоснования.

В логико-гносеологическом обосновании физической картины мира регулятивная функция исходных принципов выражается в метатеоретических принципах (общенаучных, конкретизированных философских принципах), которые ориентируют на познание объекта как принадлежащего к определенной, изучаемой данным комплексом наук форме движения материи, или же к какой-то достаточно общей стороне действительности. В физике в качестве таких метатеоретических принципов, которые сохраняют свою философскую основу и в то же время сформулированы на языке, близком к физической теории, выступают принципы соответствия (или предельного перехода уравнений новой теории в аналогичные уравнения старой теории, описывающие одни и те же формы движения), наблюдаемости (означающий, что в теории должен существовать метод элиминирования «принципиально ненаблюдаемых» из всего контекста теории или из ее фрагмента), простоты (согласно которому из двух гипотез с примерно одинаковыми объяснительными и эвристическими возможностями предпочтение следует отдать более простой), принцип незамкнутости физических теорий и неограниченности их потенциального развития (отражающий структурную неисчерпаемость объективного мира), дополнительности (когда «каждый из дополнительных аспектов теряет без другого физический смысл»[14]), целостности, инвариантности, симметрии и асимметрии, историзма, антропный принцип и др. Большая часть этих принципов впервые были разработаны в физике (за исключением принципа симметрии, разработанного в кристаллографии), но со временем стали метатеоретическими [общенаучными]. Вообще анализ регулятивного, нормативного знания содержится уже в работах Ф. Бэкона, Р. Декарта, Г. Лейбница[15]. Большое внимание уделял этой проблеме И. Кант[16] в своей концепции априорного формирования норм и идеалов научно-познавательной и практической деятельности. В процессе развития физической картины мира метатеоретические принципы обогащаются, обеспечивая, таким образом, более конкретное выражение исходных принципов в физической теории.

В качестве одного из таких философско-методологических принципов в нашем исследовании рассматривается принцип структурности. Использование этого принципа в контексте исследуемой проблемы позволяет фиксировать внимание в логической структуре уровней физической реальности на

---

[14] Кузнецов Б. Г. Принцип дополнительности. – М.: Наука, 1968. – С. 14

[15] См.: Бэкон Ф. Сочинения: В 2 т./ Ф. Бэкон; АН СССР, ин-т философии. – М.: Мысль, 1978. – Т.2 – 575 с.; Декарт Р. Рассуждение о методе. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 656 с.; Лейбниц Г. В. Новые опыты о человеческом разумении автора системы предустановленной гармонии // Г. В. Лейбниц. Сочинения: в 4 т. – М.: Мысль, 1983. – Т.2. – С. 47-545.

[16] См.: Кант И. Критика чистого разума. – СПб.: ИКА «ТАЙМ-АУТ», 1993. – 477 с.; Кант И. Критика практического разума. – СПб.: Наука, 1995. – 528 с.; Кант И. Критика способности суждения. – М.: Искусство, 1994. – 368 с.

внутренней субординации, взаимосвязи понятий конструируемой системы общих логических и методологических форм физического знания. При этом выделяемые исследователем понятия распадаются на классы по степени их общности, раскрывая структуру «многостороннего» объекта физической картины мира при ее синтезе, обеспечивая условия для проникновения в более глубокую сущность исследуемого объекта.

Первое, на что обращает внимание познающий субъект, это неоднородность объективного мира, проявляющаяся в разнообразии форм и уровней строения материи (макро, микро, мега) и их иерархий. Кроме того, любой объект представляет собой расчлененное целое, состоит из отдельных элементов и частей, между которыми существуют необходимые устойчивые связи, характеризующие общность строения материальных систем в известных масштабах. Органическая совокупность (единство) отношений и связей между элементами, составляющими материальную систему, называется структурой. Структурное единство проявляется также в существовании общих законов структурной организации систем, то есть связей, возникающих и функционирующих на основе энергетических взаимодействий, что опровергает существовавшее многие столетия в метафизике и идеалистической онтологии противопоставление земного и небесного мира, наблюдаемой реальности и постулированного трансцендентного бытия.

Осознание объективной расчлененности (структурности) вещей и закономерных связей между элементами и вещами составляет необходимое условие формирования принципа структурности. Суть принципа структурности – в осознании наличия дискретных уровней и необходимости изучения элементов (частей) и связей между ними для познания целого. Этот принцип, отражая расчлененность действительности на отдельные элементы, требует познания этих элементов и отношений (способов связей) между ними.

Понимание структурности как дифференцированности вещей нашло свое выражение еще в древнем мире в размышлениях мыслителей об упорядоченности бытия, о его строении и о происхождении вещей. Сходное понимание структуры сохранилось и до сегодняшнего дня. Представления о наличии дискретных уровней материи стали неотъемлемой частью современной науки. Идея структурности всегда присутствовала в физике. Но на начальных этапах ее становления она использовалась интуитивно [Демокрит]. В Новое время принцип структурности стал одним из основных принципов, сознательно используемых в построении физического знания.

Известно, что принципы, отражая различные стороны действительности, образуют целостную систему, в рамках которой недопустимо игнорирование одних и абсолютизация других принципов. В современной физической картине мира принцип структурности включает в себя идею развития (глобальный эволюционизм), идею взаимосвязи между качественно различными структурными уровнями и взаимных переходов их друг в друга. В структуре объекта запечатлеваются основные этапы его генезиса, совпадающие со структурными уровнями строения материи. Структурный подход предполагает единство самих вещей, устойчивую, необходимую связь их компонентов. В свою очередь данный подход включает использование, по крайней мере, двух подходов в синтезе физической картины мира: подход, использующий принцип симметрии, и системный подход. Здесь принцип симметрии и принцип системности выступают как гносеологические основания конструктивности физического знания.

При подходе, использующим принцип симметрии, логические конструкты в составе физической картины мира являются мысленными образами, фиксирующими дифференцированность объективной реальности и способствующими установлению взаимосвязей элементов целого. Поиск симметрии предполагает имплицитно экспликацию, в результате которой осуществляется перенос научных формализмов из одной предметной области в другую.

Суть принципа системности заключается в учете знаний обо всех факторах, влияющих на целостный объект, на его функционирование и развитие. Поэтому в рамках системного подхода процесс синтеза физической картины мира задается как определенная структура, раскрывающая логико-гносеологические уровни физической картины мира через категорию субъекта деятельности и блок сопряженных с ним категорий.

Таким образом, принцип структурности с необходимостью включает в себя принцип симметрии. Идея симметрии в современной науке играет значительную эвристическую роль.

Изначально понятие «симметрия» употреблялось в двух значениях. В одном смысле симметричное означает нечто весьма пропорциональное – симметрия показывает способ согласования многих частей, с помощью которого они объединяются в целое. Второй смысл этого слова – равновесие. Греческое слово συμμετρια означает однородность, соразмерность, пропорциональность, гармонию. В повседневной жизни самым наглядным примером симметрии является отражение в зеркале; мы говорим о фигуре, что она симметрична, в том случае, если через центр этой фигуры можно провести прямую, которая разделит ее на две части, являющиеся зеркальными отражениями друг друга. Более высокий уровень симметрии предусматривает наличие нескольких линий или осей симметрии. Однако отражение – не единственная операция, позволяющая достичь симметрии. Мы называем симметричной и такую фигуру, которая не изменяет своего облика, будучи повернута на определенный угол вокруг некоторой точки – центра симметрии. Однако «в природе мы обнаруживаем процессы, в которых отношением тождества связаны не две, а четыре стороны – две пары противоположностей. В этом случае речь идет о поворотной антисимметрии, которой обладают все периодически повторяющиеся процессы»[17].

Общее математическое понятие симметрии может быть определено следующим образом. Пусть дано множество *M*, в котором учитываются определенные связи между элементами, и пусть *P* есть некоторое подмножество *M*. Говорят, что совокупность *P* симметрична, или же инвариантна, относительно некоторого допустимого преобразования *A* (то есть такого, много-однозначного соответствия между элементами *M*, которое не нарушает тех или иных учитываемых связей между элементами множества) множества *M*, если преобразование *A* переводит каждый элемент подмножества *P* снова в элемент того же подмножества. Важным видом преобразований является взаимно однозначные преобразования, при которых для каждого элемента *M* существует один и только один элемент *M*, которому сопоставляется данный элемент *M*. Если при преобразовании сохраняется расстояние между любыми двумя точками

[17] Ротенфельд Ю. А. Отношения тождества и различия в категориях симметрии и асимметрии // Диалектический материализм и философские основы естествознания. – М.: МПГИ, 1986. – С. 59-64.

пространства, то такое преобразование называется движением пространства. Простейшими видами движения являются параллельный перенос начала системы координат, поворот осей координат, зеркальное отражение относительно плоскости. Совокупность преобразований множества M образует группу, если выполняются следующие условия (аксиомы группы): 1) произведение двух преобразований (последовательное выполнение их) приводит к преобразованию, принадлежащему данному множеству преобразований (аксиома замкнутости); 2) тождественное преобразование (переводящее каждый элемент M в себя) принадлежит данной совокупности; 3) для каждого преобразования данной совокупности существует обратное преобразование, также принадлежащее данной совокупности преобразований. Движения пространства образуют группу преобразований, играющую важную роль в геометрии и в физике. С каждой группой преобразований связана определенная система инвариантов относительно преобразований, составляющих данную группу.

Понятие симметрии тел в пространстве вполне подходит под это общее определение. В этом случае роль множества M играет все пространство, роль допустимых преобразований – движения, роль P – данное тело. Симметрия тела P характеризуется, следовательно, совокупностью движений, при которых тело P совмещается само с собой.

Математическое исследование понятия симметрии начинается с работ немецкого математика Феликса Клейна, который ввел понятие «группы преобразований» и в своей «Эрлангенской программе» предложил новую классификацию различных видов геометрии (проективная, аналитическая, неевклидова и др.), основанную на соответствующих им группах преобразований и их инвариантов. Основная проблема теоретико-группового подхода сформулирована им следующим образом: «Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразования группы…» Иными словами: «Дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы»[18].

[18] Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований// Об основаниях геометрии. – М.: Наука, 1958. – С. 402.

В теоретической физике понятие симметрии было перенесено на физические законы, при этом вопрос о симметрии ставился таким образом: «Что можно сделать с физическим явлением или ситуацией, возникшей при эксперименте, чтобы получился тот же самый результат?»[19]. То есть, симметрия понимается здесь как инвариантность физических законов (точнее говоря, математических уравнений, выражающих эти законы) относительно преобразований величин, входящих в эти законы. Е. Вигнер предложил разделить классические принципы инвариантности на две группы: геометрические принципы инвариантности (связанные с геометрической симметрией) и динамические принципы инвариантности (связанные с внутренней симметрией физических систем)[20]. «Геометрические принципы инвариантности, хотя они и наделяют структурой законы природы, формулируются в терминах самих явлений… Новые же, динамические, принципы инвариантности формулируются в терминах законов природы. Они скорее относятся к тем или иным типам взаимодействия, чем какой бы то ни было корреляции между событиями»[21].

Первоначально симметрия была обнаружена при изучении кристаллов. В 1783 г. французский ученый Роме де Л'Иль открыл один из важных законов кристаллографии – закон постоянства двугранных углов в кристаллах, состоящий в том, что углы между соответственными гранями во всех кристаллах одного и того же вещества являются постоянными. В 1822 году Э. Митчерлих открыл явление полиморфизма, заключающееся в том, что некоторые вещества в различных условиях способны образовывать разные по симметрии и форме кристаллы. Таким образом, явления изоморфизма и полиморфизма – одно из многочисленных проявлений действия закона перехода количественных изменений в качественные. Здесь имеет место дальнейшее обогащение содержания категории количества, так как в него включается не только число элементов или частей, составляющих целое, но и пространственное расположение этих частей. Кристаллографы революционизировали обыденные

---

[19] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции пор физике: Вып. 4 – М.: Мир, 1965. – С. 238.

[20] См.: Вигнер Е. Симметрия и законы сохранения// Е. Вигнер. Этюды о симметрии. – М.: Мир, 1971. – С.23

[21] Там же, С. 23.

представления о естественной гармонии благодаря открытию новых форм симметрии – 1, 2, …, n, в пределе бесконечнократной антисимметрии, симметрии криволинейной, подобия, многоцветной, гомологической и т.д. При всем многообразии, физиками представлено все же исчерпывающее определение структурной симметрии как свойство геометрических фигур «повторять свои части», или, выражаясь точнее, свойства их в различных положениях приходить в совмещение с первоначальным положением. Поэтому и сам принцип был сформулирован именно в кристаллографии. Однако, уже «в XVII веке, в эпоху становления нового естествознания, понятие симметрии приобретает значение методологического принципа. Иначе говоря, на основании симметрии стали строить определенные представления о мире»[22]. Математический аппарат теории симметрии – теория групп и связанные с ней вопросы геометрии и алгебры – получили развитие раньше, чем физики обратили внимание на роль симметрии в физических явлениях и законах. После открытия кристаллической решетки, русский ученый – кристаллограф Е. С. Федоров и французский физик П. Кюри одними из первых выявили значение принципа симметрии в физических теориях: «каждый физик пользуется в более или менее явной форме понятиями симметрии»[23]. Мария Кюри так характеризует идею П. Кюри о роли симметрии в физике: «Принцип симметрии является одним из тех немногочисленных великих принципов, которые господствуют в физических явлениях; исходя из понятий, вытекающих из опыта, они малу-помалу приобретают все более и более совершенную форму»[24].

«Понятие «симметрия» выросло на изучении живых организмов и живого вещества… Само понятие, связанное с понятием красоты или гармонии, было дано великими греческими ваятелями»[25]. В начале XX века, оценивая методологическое значение симметрии, В. И. Вернадский выдвигает мысль о весьма

---

[22] Овчинников Н. Ф. Тенденция к единству науки: познание и природа / Отв. ред. Б. М. Кедров, П. П. Гайденко; АН СССР. Ин-т истории естествознания и техники. – М., 1988. – С 77.

[23] Кюри М. Пьер Кюри. – Е. Кюри. Мария Кюри: Пер. с фр. / Послеслов. В.В. Аппатова. – М.: Молодая гвардия, 1959. – С. 148

[24] Там же, С. 25-26.

[25] Вернадский В. Н. Химическое строение биосферы Земли и ее окружения. – М., 1956. – С. 177.

широком охвате этим принципом всех областей естествознания: Эту мысль ученого Н. Ф. Овчинников назвал «принципом Вернадского»[26].

Процессы вращения и отражения могут происходить не только в обычном пространстве, но и в абстрактных математических пространствах, «те или иные виды симметрии находят свое отражение в разнообразных физических законах»[27]. Так, в классической физике используется симметрия относительно центра вращения, порождающая непрерывное преобразование, и симметрия между правым и левым, порождающая дискретное преобразование. В то время как непрерывное преобразование в классической механике всегда приводит к закону сохранения, дискретное преобразование к закону сохранения не приводит. Однако в рамках квантовой механики это различие между непрерывным и дискретным преобразованиями исчезает: симметрия правого и левого также приводит к закону сохранения – закону сохранения четности. Но в плане выявления конкретной связи между сущностью явления и ее проявлением уместно рассматривать симметрию правого и левого в качестве проявления объективного закона сохранения четности[28].

В классической механике, электродинамике и нерелятивистской квантовой механике законы сохранения энергии, импульса и углового момента являются прямыми следствиями симметрии законов природы относительно группы преобразований, названной Е. Вигнером «группой Пуанкаре» [29]. Эта группа включает в себя сдвиги в пространстве и времени, вращения, зеркальные отражения (инверсии) и переходы от одной инерциальной системы отсчета к другой. «Следует подчеркнуть, что законы симметрии применимы именно к законам природы, т.е. к корреляции между событиями, а не к самим событиям»[30]; «…законы сохранения энергии, импульса и углового момента являются прямыми следствиями только что названных симметрий»[31].

[26] Овчинников Н. Ф. Принципы теоретизации знания. – М., 1996. – С. 104.
[27] Подробнее см. кн.: Компанеец А. С. О симметрии. – М.: Знание. – М., 1965.
[28] Князев В. Н. Концепции взаимодействия в современной физике. – М.: МПГУ, 1991. – С. 37.
[29] Вигнер Е. Симметрия и законы сохранения. – С. 24-25.
[30] Там же, С. 25.
[31] Там же, С. 26.

«В квантовой механике… законы сохранения следуют из основных кинематических понятий. Это связано с тем, что в квантовой механике состояниям [физической системы] отвечают векторы в некотором абстрактном пространстве [гильбертовом пространстве функций], а физическим величинам, таким, как координата, импульс и т.д., – операторы, действующие на эти векторы… Следует подчеркнуть, что *операторы преобразования, по крайней мере инфинитезимальные, играют двоякую роль и сами являются сохраняющимися величинами.*»[32]

Динамические принципы инвариантности впервые применены при построении теории электромагнитных взаимодействий в классической электродинамике. Чтобы описать взаимодействие зарядов с электромагнитным полем, вводят так называемые электромагнитные потенциалы, то есть величины, характеризующие электромагнитное поле. Знание их позволяет вычислять компоненты электромагнитного поля, но обратное неверно: потенциалы определяются полем (то есть значениями индукции или напряженности электрического и магнитного поля) неоднозначно: «различные потенциалы (отличающиеся на градиент произвольной функции) порождают одно и то же поле. Отсюда следует, что потенциалы нельзя измерить, и, действительно, измеримыми оказываются лишь величины, инвариантные относительно преобразований, произвольно зависящих от потенциалов. Разумеется, такая инвариантность носит искусственный характер. Нечто аналогичное можно было бы получить, введя в наши уравнения координаты какого-нибудь «духа»: уравнения должны были бы быть инвариантными относительно изменений координат «духа», но в действительности никакой пользы от введения такой величины мы бы не получили. Аналогичная ситуация возникает и при замене полей потенциалами, если при этом все должно остаться неизменным. Поэтому обычно поступают иначе: постулируют (и в этом состоит решающий шаг), что для поддержания неизменности физической картины каждое преобразование, переводящее один набор потенциалов в другой, порождающий то же самое электромагнитное поле, должно сопровождаться некоторым преобразованием поля материи. Комбинация этих двух преобразований, из которых одно действует на электромагнитные потенциалы, а другое – на поле материи, называется

---

[32] Там же, С. 27.

калибровочным преобразованием. Поскольку калибровочное преобразование оставляет физическую ситуацию неизменной, всякое уравнение должно быть инвариантным относительно него. Однако, если бы вид уравнений движения оставался неизменным, мы пришли бы к противоречию. Оставаясь инвариантными, они обладали бы абсурдным свойством: две абсолютно эквивалентные в один момент времени физические ситуации некоторое время спустя превращались бы в две существенно различные ситуации. Следовательно, уравнения движения следовало бы каким-то образом изменить. Проще всего это сделать с помощью математического приема, называемого модификацией лагранжиана. Простейшая модификация, сохраняющая инвариантность, приводит к общепринятым уравнениям электродинамики, находящимися в хорошем согласии со всеми имеющимися в нашем распоряжении данными опыта»[33].

Таким образом, при построении классической электродинамики для выведения законов природы оказывается недостаточным принцип инвариантности относительно преобразований группы Пуанкаре (т.е. геометрический принцип инвариантности); необходимо применение динамического принципа инвариантности (т.е. инвариантность относительно калибровочных преобразований). «…Аналогичная процедура допустима и по отношению к гравитационному взаимодействию… Динамический характер инвариантности общей теории относительности подчеркивал советский физик Фок [Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961]»[34] .

Относительно других известных в настоящее время фундаментальных взаимодействий (сильного и слабого) дело обстоит несколько по-другому. «Как сильное, так и слабое взаимодействия обладают группой, которая гораздо беднее группы калибровочных преобразований или группы произвольных преобразований координат. Вместо бесконечного набора генераторов названных групп, динамические группы этих взаимодействий обладают лишь конечным числом генераторов (а именно восемью). Тем не менее и этого оказывается достаточно для того, чтобы в значительной степени определить характерные особенности взаимодействий… Однако, в то время как при

[33] Там же, С. 28–29
[34] Там же, С. 29.

действии групп электромагнитного и гравитационного взаимодействий остаются инвариантными все взаимодействия, при действии группы сильного взаимодействия остается инвариантным лишь сильное взаимодействие[35]».

Выделяют четыре основные типа законов сохранения, представляющиеся общими для всех физических взаимодействий. Три из них связаны со свойствами симметрии обычного пространства и времени; в них взаимодействия частиц характеризуются инвариантностью относительно преобразований группы Пуанкаре. Вытекая непосредственно из законов движения Ньютона в поздней формулировке Лагранжа и Гамильтона, каждый из них обнаруживает связь между сохранением той или иной величины и соответствующей пространственно-временной симметрией.

1) Одна из симметрий связана с сохранением импульса. Закон сохранения импульса, являющийся в классической механике следствием законов динамики Ньютона, в современной физике рассматривается как проявление однородности пространства (то есть является следствием инвариантности лагранжиана L относительно группы преобразований пространства, включающей в себя перенос начала трехмерной пространственной системы отсчета).

2) Вторая связана с сохранением энергии: суммарное количество энергии частиц, включающей их массы, остается неизменным в процессе любого взаимодействия[36], – применим как к процессам, протекающим в системах со сколь угодно большим конечным числом степеней свободы, так и к процессам в системах с бесконечным числом степеней свободы (непрерывным средам). Закон сохранения энергии в современной физике рассматривается как проявление однородности времени (то есть является следствием инвариантности лагранжиана L относительно преобразования времени, связанного с переносом начала отсчета времени в инерциальной системе отсчета).

3) Третий основополагающий тип симметрии связан с сохранением момента импульса (количества движения). Смысл этой симметрии заключается в том, что выбор направления пространственных осей координат системы отсчета не оказывает

---

[35] Там же, С. 30-31.

[36] «Энергия не создается и не исчезает бесследно, а из одного вида переходит в другой в эквивалентных количествах» (Майер, 1840 г.)

никакого влияния на результаты взаимодействия частиц в замкнутой системе. Как следствие этой закономерности, суммарный момент количества движения системы относительно любой точки не должен изменяться во время процесса в замкнутой системе. Таким образом, закон сохранения момента импульса рассматривается в современной физике как проявление изотропности пространства (то есть является следствием инвариантности лагранжиана L относительно поворота пространственных осей координат относительно начала координат): если система симметрична относительно вращений, то из уравнений Гамильтона и Лагранжа следует, что сохраняется момент импульса. Проявлением этого закона является эмпирически открытые законы Кеплера: гравитационное поле Солнца симметрично и поэтому не изменяется при простом вращении (момент импульса планеты, движущейся по орбите всегда постоянен)[37].

В специальной теории относительности, лежащей в основе электродинамической картины мира, рассмотренные выше типы симметрии, связанные с обобщенными законами сохранения энергии, импульса и момента импульса, а также теоремой о центре инерции, обусловлены однородностью и изотропностью четырехмерного пространства–времени[38] (инвариантностью лагранжиана L относительно лоренцевых преобразований).

4) Четвертый тип законов сохранения обусловлен симметриями, связанными с динамическими принципами инвариантности. Классическим примером является закон сохранения электрического заряда, который «обычно принято считать следствием калибровочной инвариантности, т.е. инвариантности относительно групп электромагнитных взаимодействий. С другой стороны, относительно законов сохранения, которые следовало бы приписать динамической группе общей теории относительности, мы можем строить лишь чисто умозрительные заключения. Однако есть основания надеяться на то, что законы сохранения барионного и лептонного зарядов удастся получить с помощью динамических групп сильного и слабого взаимодействий. Если данная гипотеза верна, то это означает лишь, что мы еще не знаем истинных групп

[37] Этот факт был открыт в XVII в. Кеплером, который не оценил его истинный смысл.
[38] Вальтер Е. Тирринг. Принципы квантовой электродинамики. – М.: Высш. шк., 1964. – С. 48.

сильных и слабых взаимодействий. В пользу последнего утверждения можно привести два соображения. Во-первых, законы сохранения барионного и лептонного зарядов до сих пор не удалось вывести из свойств симметрии сильного и слабого взаимодействий и маловероятно, что это удастся сделать в будущем. Во-вторых, симметрия сильного и слабого взаимодействия не является точной и нарушается при включении других взаимодействий. Неясно, каким образом точные законы сохранения могут следовать из приближенных симметрий. Между тем все данные говорят о том, что законы сохранения барионного и лептонного зарядов выполняются точно. Все это еще раз напоминает о том, что наши представления о динамических принципах инвариантности обоснованы далеко не так полно и прочно, как наша теория геометрических принципов инвариантности»[39].

Основой взаимосвязи «симметрия – сохранение» служит теорема Нётер, установленная ею в 1918 году[40] о соответствии между законами сохранения и преобразованиями, составляющими инвариантное действие: «Всякому непрерывному преобразованию координат, обращающему в нуль вариацию действия, при котором задан также закон преобразования функций поля, соответствует определенный инвариант, т.е. сохраняющаяся координация функции поля и их производных»[41]. Согласно этой теореме из инвариантности относительно сдвига по времени (то есть из гомогенности времени) следует закон сохранении энергии, относительно пространственных сдвигов – закон сохранения импульса, относительно пространственного вращения – закон сохранения момента импульса и т.д.[42]. Таким образом, Э. Нётер дала общий алгоритм, позволяющий найти полную систему инвариантов любой физической теории, формулируемой в терминах Лагранжева или Гамильтонова формализма. Это означает, что наличие определенных законов сохранения у материальной системы связано со свойствами материи, со свойствами симметрии, так что обсуждение взаимно однозначной связи некоторых физических и геометрических характеристик

[39] Вигнер Е. Симметрия и законы сохранения. – С. 31-32
[40] Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. – М., 1959. – С. 613
[41] Боголюбов Н., Ширков Д. Введение в теорию квантовых полей. – М.-Л., 1957, С. 20.
[42] Вайцзеккер К. Ф. Физика и философия // Вопросы философии. – М., 1993. – №1. – С. 122

подчас приводит к субстанциональным представлениям о пространстве и времени. Гносеологические корни этой связи вскрыты Р. А. Ароновым[43]. Эвристическая сторона теоремы Нётер проявляется в поиске новых законов сохранения на основе обнаружения новой симметрии системы. Но, как в дальнейшем было показано, субъективная переоценка роли симметрии в физике не учитывала объективного единства симметрии и асимметрии[44].

В квантовой электродинамике принципы симметрии (геометрические и динамические принципы инвариантности) положены в основу систематизации элементарных частиц, а поскольку свойства частиц определяются их взаимодействием, все операции, позволяющие достичь симметрии, связаны с «законами сохранения». Например, симметричный характер субатомного процесса предполагает участие в нем некой константы или постоянной величины. Здесь константы помогают физикам в описании взаимодействий частиц. Некоторые величины «сохраняются» во всех взаимодействиях, – такие величины становятся «мировыми» физическими константами, а другие «сохраняются» только в части взаимодействий, – такие величины называются «константами [данного] взаимодействия». Симметричность частиц и их взаимодействий является одной из форм проявления глубинных законов сохранения. Физики в этом смысле говорят о равнозначности симметрии процесса и соответствующего закона сохранения; но, несмотря на то, что в квантовой теории поля мы всегда можем вывести законы сохранения из условий симметрии, интерпретация этих законов сохранения и их физический смысл могут быть весьма проблематичными. Основная проблема здесь заключается в том, что неклассические законы сохранения (законы сохранения барионного числа, лептонного числа, «странности», «изотопического спина» и др.), связанные с операциями симметрии в абстрактных математических пространствах, основаны на новых инвариантностях, а «новые инвариантности

---

[43] Аронов Р. А. Соотношение феноменологических и динамических теорий в физике элементарных частиц // Вопросы философии. – М., 1969. – № 1. – С. 80–81

[44] Аронов Р. А., Угаров В. А. Теорема Нётер и связь законов сохранения со свойствами симметрии пространства и времени // Философские вопросы современного естествознания (физика, математика, биология). – Вып. 5. – М., 1978. – С. 21.

представляют собой инвариантности отдельных типов взаимодействий, а не всех законов природы. Отсюда следует, во-первых, существование различных типов взаимодействий, таких, как гравитационное, слабое, электромагнитное, и, может быть, два вида сильных взаимодействий. Во-вторых, отсюда следует, что новые, или негеометрические, типы инвариантности невозможно сформулировать непосредственно в терминах корреляций между событиями, в то время как классические, или геометрические, инвариантности… допускают такую формулировку. Если бы новые инвариантности можно было сформулировать в терминах корреляций между событиями, то ими, так же как и классическими инвариантностями, обладали бы все взаимодействия. В действительности дело обстоит иначе… По-видимому, должен существовать какой-то более глубокий принцип, позволяющий объяснить, почему имеется несколько типов взаимодействий и соответствующих им различных групп»[45]. Таким образом, основная проблема построения квантовой теории поля (и основанной на ней квантово-полевой физической картины мира) сводится к построению единой теории фундаментальных взаимодействий на основе выявления универсальных симметрий.

Объединение симметрий в мире элементарных частиц привело бы физиков к построению теории «фундаментальной симметрии», которая была бы характерна для всех частиц и поэтому выражала принципы строения материи. Подобный подход вполне согласуется с основными идеями европейской философии и науки со времен Древней Греции и является, по-видимому, эллинистическим наследием, но, тем не менее, трудно укладывается в русло идей современного научного мировоззрения. Симметрии в античной философии придавалось значение красоты, гармонии, совершенства; так пифагорейцы считали, что сущность всех вещей определяется симметричным числом паттернов, что по-своему реализовало тезис: «Все вещи суть числа», в котором числа, существующие лишь в сознании человека, отождествляются с вещами, существующими вне и независимо от него; большинство греческих астрономов придерживались концепции, согласно которой все небесные тела

---

[45] Вигнер Е. Роль принципов инвариантности в натуральной философии // Этюды о симметрии. – М.: Наука, 1959. – С. 40–41.

движутся по окружностям, поскольку круг – самая симметричная геометрическая фигура; Платон считает формами природных начал правильные многогранники («платоновы тела») в силу присущей им симметрии. Таким образом, математизация физики, связанная с приближением физики к таким однородным и простым элементам материи, которые допускают обобщенную математическую формулировку всех важнейших законов природы, имеет свои предпосылки уже в античной натурфилософии. Однако, тот же самый исторический опыт развития европейской натурфилософии показывает, что при определенных условиях на основе математизации научного знания может возникнуть иллюзия всемогущества уравнений и возможности подмены физической реальности математическими символами. В современных условиях на новой стадии развития эта иллюзия возрождается в виде кантианской идеи: разум предписывает законы природе. В частности, такой подход обнаруживается в связи с интерпретацией коллапсов волновых функций. В отличие от изменения волновых функций во времени, описываемого в теории как изменение во времени свойств квантовых объектов посредством уравнения Шрёдингера, результат взаимодействия этих квантовых объектов с прибором описывается как коллапс волновых функций, то есть как мгновенное исчезновение их по всей остальной части пространства, где они были до этого отличны от нуля. В известном парадоксе Эйнштейна–Подольского–Розена эта ситуация выглядит следующим образом. «Когда коррелированные пары частиц со спином $\pm 1/2$ и с суммарным моментом, равным нулю, разлетаются из общего центра», то «корреляция между спинами в момент измерения устанавливается мгновенно… До измерения у частицы нет определенного значения спина. Оно появляется только в момент измерения в виде коллапса волновой функции»[46]. Вывод явно противоречив, но «если стоять на позициях реалистического подхода, то коллапсы волновых функций следует

[46] Кадомцев Б. Б., Кадомцев М. Б. Коллапсы волновых функций // Успехи физических наук. – М., 1996. – Т. 166. – №6. – С. 655

рассматривать как реально протекающие [объективные] процессы»[47].

С идеалистических позиций, исторически, существовал иной подход понимания симметрии в культуре как продукт мыслительной деятельности человека, а не свойство, присущее самой природе, что не придавало симметрии такого большого значения. В соответствии с этим философским подходом восточное искусство часто использует асимметричные очертания и последовательности как наиболее естественные и избегает всех правильных геометрических форм. Этот подход в современной физике частично реализовался в принципе относительности к средствам наблюдения В. А. Фока[48], который обнаруживает, что относительность к средствам наблюдения характеризует процесс познания объектов в любой области, в частности в области применения классической физики. В этом смысле в рассмотренном ранее примере, коллапсы волновых функций исчезают из объективной действительности и оказываются всего лишь элементами теории, характеризующими изменение вероятности реализаций проекций на прибор соответствующих свойств квантовых объектов; не свойства квантовых объектов существуют (или «возникают») постольку, поскольку измеряются, а их проекции на прибор – свойства квантовых объектов, которые внутри рассматриваемой локальной области воссоздаются познающим субъектом-наблюдателем по их проекциям на прибор, за его пределами оказываются лишь теоретическими образами этих свойств, описывающими их, но отнюдь не являющихся ими самими. Данное положение в духе конструктивного эмпиризма совпадает с утверждением копенгагенца М. Борна: «Физик должен иметь дело не с тем, что он может мыслить (или представлять), а с тем, что он может наблюдать. С этой точки зрения состояние системы в момент времени **t**, когда не проделывается никаких наблюдений, не может служить предметом рассмотрения»[49]. В этом смысле, Гейзенберг утверждал: «Мельчайшие единицы материи в самом деле не физические объекты… они суть формы, структуры или идеи в смысле Платона, о которых можно говорить только на

[47] Кадомцев Б. Б., Кадомцев М. Б. Коллапсы волновых функций // Успехи физических наук. – М., 1996. – Т. 166. – №6. – С. 659.

[48] См.: Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Физматгиз, 1961. – Изд.2-е. доп. – 563 с.

[49] Борн М. Размышления и воспоминания физика: Сб. ст. / Макс Борн. АН СССР – М: Наука, 1977. – С. 171.

языке математики»[50]. Руководствуясь такими идеями, Гейзенберг рассматривал физическую теорию не как отражение объективной реальности, а как абстрактную теорию феноменологического характера, не вводящую никаких величин, кроме тех, которые непосредственно связаны с экспериментальными данными[51]. Таким образом, известные парадоксы Эйнштейна демонстрируют «только лишь парадоксальную форму традиционной (эйнштейновской) точки зрения, где ненаблюдаемое промежуточное состояние считается таким же реальным, как действительно наблюденное конечное состояние»[52]. Наряду с вышесказанным и «законы сохранения никоим образом не сводятся к симметриям, хотя и связаны с ними. Представляется, что наиболее адекватным образом эта связь раскрывается через категории сущности и явления»[53]. Синонимичность закону симметрии как тождественного в различном, и инвариантности как устойчивого в изменяющемся, отчасти проявляется в выяснении причин, порождающих симметрию, что приводит к установлению большего числа закономерностей.

В дальнейшем при исследовании наукой природы по мере углубления в микромир в связи с обнаружением новых типов симметрии происходит расширение, обогащение и углубление содержания принципа симметрии, возрастает его методологическая роль и находит свое воплощение в целой системе общих преобразований. В их число входят[54]: *непрерывные преобразования пространства-времени* (**сдвиг систем как целого в пространстве** – реальный перенос физической системы относительно выбранной системы отсчета или параллельный перенос системы отсчета [однородность пространства]; **поворот системы как целого в пространстве** – эквивалентность всех направлений в пространстве [изотропия пространства], **сдвиг во времени** – физические законы не меняются со временем;

---

[50] Гейзенберг В. Шаги за горизонт: Сборник: Пер. с нем. / Общ. ред. и вступ. ст. Н. Ф. Овчинникова. – М.: Прогресс, 1987. – С. 118

[51] Бройль Луи де. По тропам науки / Пер. с фр. канд. филос. наук. С. Ф. Шушурина. Послеслов. [С. 380-406.] и общ. ред. д-ра филос. наук проф. И. В. Кузнецова. – М.: ИЛ, 1962. – С. 175

[52] Борн М. Размышления и воспоминания физика: сб. ст. / Макс Борн. АН СССР – М: Наука, 1977. – С. 171.

[53] Князев В. Н. Концепции взаимодействия в современной физике. – М.: МПГУ, 1991. – С. 37.

[54] Готт В. С. Философские вопросы современной физики. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 263– 264.

эквивалентность всех инерциальных систем отсчета – переход к системе отсчета, движущейся относительно данной системы с постоянной [по направлению и величине] скоростью);

дискретные преобразования пространства-времени (пространственная инверсия (*P*) – изменение пространственных координат событий (x,y,z), определенных в некоторой декартовой системе, на их противоположные значения (-x,-y,-z); обращение времени (*T*) – математическая операция замены знака времени в уравнениях, описывающих развитие во времени какой-либо физической системы; зарядовое сопряжение (*C*) – операция замены всех частиц, участвующих в каком-либо взаимодействии, на соответствующие античастицы; комбинированная инверсия – *CP*);

преобразования внутренних симметрий (изотопическая инвариантность сильного взаимодействия, унитарная *SU(3)*-симметрия, цветовая симметрия, между кварками и лептонами, которая играет важную роль в создании единой теории электрослабого и сильного взаимодействий);

суперсимметрия (симметрия, связывающая поля, кванты которых имеют целочисленный спин (подчиняющиеся статистике Бозе-Эйнштейна), с полями, кванты которых имеют полуцелый спин (Ферми-Дирака) – объединение бозонов и фермионов в обобщенные мультиплеты (ансамбли), позволяющие в этом случае «осуществлять системную взаимозависимость постоянно занимаемых и освобождаемых состояний частиц в квантовом ансамбле»[55]. Для фермионов это выливается, например, в то, что не может быть в ансамбле двух частиц, находящихся в одинаковом состоянии);

калибровочная симметрия (некоторые сохраняющиеся величины – «заряды» (электрические заряды, гиперзаряд, «цвет» и др.) одновременно являются источниками полей, а калибровочные поля дают возможность вводить модель некоторого расслоенного пространства, каждый слой которого локально отражает свойства симметрии того или иного типа материальных взаимодействий. Все современные варианты теории элементарных частиц являются калибровочно инвариантными, так как используют некие калибровочные преобразования, которые представляют собой переход в теории от одних значений, характеризующих поле

[55] Князев В. Н. Концепции взаимодействия в современной физике. – М.: МПГУ, 1991. – С. 88

величин, к другим, оставляющим без изменения физические определенные, наблюдаемые на опыте параметры поля. Так, гравитационное поле определяет кривизну физического пространства через свои потенциалы, которые могут интерпретироваться как коэффициенты связности плоских пространств, а для сильных взаимодействий локально вводится пространство изотопического спина, симметрия которого выражается законом сохранения изоспина).

Таким образом, принципы симметрии позволяют вывести соответствующий закон сохранения (имеет ли этот закон какой-либо физический смысл – это другое дело). Однако, не известно, как перейти от какого-либо закона сохранения к лежащему в его основе принципу симметрии. Нынешнее состояние физики высоких энергий физик-теоретик В. Вайскопф охарактеризовал как «… экспериментальную науку. Мы исследуем неизвестные стороны поведения в совершенно новых условиях. Мы делаем… новые открытия в стране…, позволяющие глубоко проникнуть в тайны строения материи. Должно пройти некоторое время, прежде чем мы сможем составить разумную карту этой страны…»[56]. Так, до сих пор из свойств симметрии сильных и слабых взаимодействий не удалось вывести строгого сохранения барионного и лептонного зарядов. Надежда на то, что будет сформулирован «более глубокий принцип, позволяющий объяснить, почему имеется несколько типов взаимодействий и соответствующих им различных групп»[57], основана на убеждении в единстве природы, существовании в ней еще более глубоких законов, чем познанные нами ныне.

Итак, в настоящее время симметрия рассматривается как форма упорядоченности элементов в целостных структурах систем, как согласованность и уравновешенность отдельных частей объекта, как инвариантность (сохранение) свойств и отношений относительно определенной группы преобразований. Это понятие связано с представлениями о сходстве, повторяемости, ритме, форме и т.п.

В этой связи наряду со статическим, «симметрическим» подходом в ней представлена и «динамический» подход, который

---

[56] Вайскопф В. Ф. Физика в двадцатом столетии / В. Вайскопф; Пер. с англ. канд. физ.-мат. наук А. Г. Беды и канд. физ.-мат. наук А. В. Давыдова. – М.: Атомиздат, 1977. – С. 213

[57] Вигнер Е. Этюды о симметрии / Пер. с англ. Ю. А. Данилова; Под редакцией Я. А. Смородинского – М.: Мир, 1971. – С. 141.

стремится рассматривать паттерны частиц не как конечный уровень устройства мира, а как нечто вторичное, своего рода проявление динамической природы субатомной действительности и принципиальной взаимосвязанности и нераздельной слитности всех происходящих в ней явлений. Так, все свойства симметрии рассматриваются как проявления состояния покоя, а все свойства асимметрии – как проявления состояния движения. Связь понятий симметрии и асимметрии точнее можно выразить как единство покоя и движения. Понятие симметрия соответствует состоянию равновесия в состояниях движения, а понятие асимметрии – моменту движения, изменению в состоянии равновесия. Асимметрия внутренних свойств элементарных частиц, как было показано, обусловлена наличием спина, четности и других характеристик микрообъекта, а открытие несохранения четности обнаружило, что при описании процессов распада, когда четность не сохраняется, используется аксиально-векторный гамильтониан[58]; при этом только комбинация симметричных и ассиметричных составляющих гамильтониана дает совпадение с экспериментом. Но хотя существует принципиальная связь между симметрией, асимметрией и законами сохранения, однако эту связь нельзя преувеличивать настолько, чтобы все основное содержание законов сохранения сводить к формам симметрии и асимметрии. «Задача теоретического обоснования законов сохранения не только в том, чтобы раскрыть их связи с формами симметрии и асимметрии, но и в том, чтобы раскрыть их связи друг с другом, со структурой полей, с такими всеобщими принципами, как принцип неповторимости и неуничтожимости материи и движения и принцип единства атрибутов материи»[59]. Поэтому при теоретическом обосновании законов сохранения на основе исследований фундаментальных взаимодействий принципиально важную роль играет принцип единства симметрии и асимметрии. «Конкретизация принципа единства симметрии и асимметрии осуществляется посредством категории антисимметрии»[60], одним из предельных значений которой является симметрия, а другим асимметрия. В современной

[58] Готт В. С. Философские вопросы современной физики. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 263–264.
[59] Там же, С. 300.
[60] Ротенфельд Ю. А. Отношения тождества и различия в категориях симметрии и асимметрии // Диалектический материализм и философские основы естествознания. – М.: МПГИ, 1986. – С. 22.

литературе, в частности в работах А.В. Шубникова и В.С. Готта, под антисимметрией понимается «свойство многих объектов совмещаться с собой в разных позициях операциями симметрии в сочетании с операцией перемены знака фигуры. Здесь под знаком фигуры понимают различные характеристики объекта: знаки электрических зарядов (плюс – минус), выпуклость – вогнутость, черное – белое, растяжение – сжатие, вперед – назад и т.д.»[61].

Таким образом, установлено, что симметрия является атрибутом материи, таким же фундаментальным, как пространство, время, движение, на что обратили внимание в своих работах, в частности, Ю.А. Урманцев, В.С. Готт, Р.А. Аронов, В.А. Угаров[62]. Так, никто уже и не сомневается в том, что существует и фазовое пространство. «Фазовое пространство», разумеется, есть мыслительный образ, логический конструкт, как и «кварки», и теорема Нётер, и многие другие научные формализмы, объединенные физической картиной мира. Но они в себе содержат объективную истину, практически работающее знание, опредмеченное в атомной энергетике, в высоких технологиях и т.д. В настоящее время принцип симметрии стал общенаучным философским принципом, универсальным коррелятом, проявляющийся на всех уровнях познания и способствующий установлению структуры и взаимосвязей элементов целого.

Подход с использованием принципа симметрии стал одним из ведущих в синтезе физических знаний. Говоря об этой функции принципа симметрии, И. Д. Акопян пишет: «До появления идеи симметрии математика и естествознание напоминали отдельные островки безнадежно изолированных друг от друга и даже противоречивых представлений, законов, теорий. Симметрия знаменует собой эпоху синтеза, когда разрозненные фрагменты научного знания сливаются в единую, целостную картину мира»[63].

---

[61] См. Готт В. С. Симметрия и асимметрия. Стенограмма публ. лекции, прочит. в центр. лектории общества «Знание». – М., 1965. – 32 с.

[62] См.: Аронов Р. А., Угаров В. А. Теорема Нетер и связь законов сохранения со свойствами симметрии пространства и времени // Философские вопросы современного естествознания (физика, математика, биология). – Вып. 5. – М., 1978. – С. 21; Готт В. С. Философские вопросы современной физики. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – 343 с; Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. (Философский и естественнонаучный аспект). – М.: Мысль, 1974. – 229 с.

[63] Акопян И. Д. Симметрия и асимметрия в познании. – Ереван: АН АрмССР, 1980. – С.8

Значит, не только и не столько ощущения выступают для человека источником знания, ибо «объектом познания человека постоянно остается окружающая действительность, и в центре его – сознание личности. Предметом познания всегда является истина – информационная модель бытия. С помощью чувственности – ощущений, восприятий, представлений я ориентируюсь в окружающем мире, пытаюсь практически его преобразовать для себя. Но знать его законы и существенные свойства я могу только осваивая практически информационные модели в предметах, свойствах, отношениях»[64]. Такой моделью, в частности, выступает физическая картина мира. Таким образом, сознание в живом созерцании принимает такую же рациональную форму как и абстрактное мышление, ибо связано с осмыслением чувственных данных. Единство чувственности и мышления необходимое условие познавательной деятельности человека. Благодаря этому единству чувственные данные становятся источником обобщающих, в том числе и теоретических выводов. Но это же единство делает невозможным непогрешимое чувственное отражение действительности. В результате осознания такого единства формируется, по видимому, в психике личности некое смысловое поле, отраженное в так называемом «пред-знании» или «пред-рассудке», посредством которых в процессе «экспериментального диалога» самосознание выращивает подлинное знание, синтезируя физическую картину мира как идеальную модель, адекватно соответствующую объективным сущностям и связям в духе утверждения древних: In interiore hominis habitat veritas (внутри человека обитает истина). Так субъективное элиминируется со временем из понятий, а понятийное мышление выступает главной формой бытия науки, которую Гегель называл рассудочной формой[65].

В физике знание развивается на основе системы фундаментальных понятий (понятийного аппарата), играющей роль каркаса, инварианта при смене парадигм физического знания, обеспечивающей преемственность и сохранение ее содержания. На недостаточную разработку систем фундаментальных понятий неоднократно указывал еще А. Эйнштейн, который, например, неполноту квантовой механики

---

[64] Королев Б. Н. Перестройка бытия и личность: Монография. – Курск: РОСИ, 2001. – С. 121

[65] См. Гегель Г. В. Ф. Наука логики / Отв. ред. и авт. вступ. ст. с. 5-74 М. М. Розенталь – М.: Наука, 1972. – Т.3 – Учение о понятии. – С. 81.

считал следствием ее нефундаментальности. В. Гейзенберг отмечал, что использование понятий классической физики при изучении квантовых объектов ограничено соотношением неопределенностей[66] и, как известно, выделял несколько фундаментальных систем понятий, среди которых были понятия классической механики, теории теплоты, электродинамики и специальной теории относительности, квантовой теории. Дальнейшее развитие комплекса физических дисциплин с необходимостью привело к возникновению новых систем понятий[67]. Думается, что в этом направлении находит решение вопрос о «полифундаментальности» теорий в естествознании[68]. Признавая ограниченность классических понятий и в то же время неизбежность их применения, основное внимание было уделено как разработке новых, собственно квантовых понятий, так и изменению способов описания, правил оперирования старыми, классическими понятиями, что и было реализовано в «копенгагенской интерпретации» квантовой механики, в основу которой положены «принцип дополнительности» (комплементарности) Н. Бора[69] и «принцип неконтролируемого взаимодействия» В. Гейзенберга в интерпретации Н. Бора. Таким образом, использование понятий оказывается связанным с экстраполируемостью знаний, а экстраполяция как один из важнейших методов научного познания непосредственно основывается на отношениях тождества между различными пространственно-временными областями материального мира. При этом признается, что имплицитным моментом любой экстраполяции является установление тождественности различных объектов или областей исследования, поиск симметрии.

Дальнейшее развитие принципа симметрии в физико-математических науках было связано с изучением временных проявлений симметрий, заключающиеся главным образом в преемственности развития определенных структур. Выявлено, что формы упорядоченности в процессе развития имеют тенденцию к усложнению. При сочетании симметрии с дисимметрией,

---

[66] Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое / Пер. с нем. – М.: Наука, 1989. – С. 25.

[67] Кузнецов И. В. Избранные труды по методологии физики. – М.: Наука, 1975. – С. 158.

[68] Ахундов М. Д., Баженов Л. Б. Физика на пути к единству. – М.: Знание, 1985. – С.55.

[69] Бор Н. Атомная физика и человеческое познание. – М.: ИЛ, 1961. – С. 8

происходит переход от одних пространственных групп симметрии к другим. Симметрия и асимметрия процесса развития проявляются в устойчивости и изменчивости, цикличности и направленности, обратимости и необратимости. Учитывая, что фундаментальные взаимодействия сами по себе обладают определенными формами симметрии, так как остаются неизменными, инвариантными при некоторых преобразованиях, можно сделать вывод о глубоком внутреннем переплетении изменения, сохранения и симметрии. Симметрия развития – это трансляция структурных отношений вдоль временной оси, что говорит о единстве пространственной и временной симметрии. Здесь использование принципа симметрии может пониматься как один из критериев развития. Поэтому поиск симметрии предполагает имплицитно экстраполяцию, в результате которой возможно осуществление переноса знания из одной области в другую.

Таким образом, принцип структурности, дополненный идеями принципа симметрии, является одним из тех принципов, которые должны лежать в основе физической картины мира, выступать ее гносеологическим основанием.

Кроме того, структурный подход, включая в себя системный подход предполагает процесс синтеза физической картины мира как определенную структуру, раскрывающую логико-гносеологические уровни физической картины мира посредством учета знаний обо всех факторах, влияющих на ее функционирование и развитие. Принцип системности играет определяющую роль в системном подходе, воплощающимся в представлении материи как структурно упорядоченного образования на основе понятия системы. В. Н. Садовский приводит около сорока определений понятия «система», получивших наибольшее распространение в литературе[70]. Из совокупности имеющихся определений мы выделим, по нашему мнению, наиболее корректное и простое, данное одним из основоположников общей теории систем Л. Берталанфи: «система – это комплекс взаимодействующих элементов»[71]. Это определение является значимым во всех предлагавшихся до сих пор вариантах системного подхода. К группе сходных

---

[70] Садовский В. Н. Основания общей теории систем: Логико-методологический анализ. – М.: Наука, 1974. – С. 77-106.

[71] См.: Берталанфи фон Л. Общая теория систем. Критический обзор// Исследования по общей теории систем. – М., 1969.

определений можно отнести и следующее: «система есть отграниченное множество взаимодействующих элементов»[72]. На понятии системы базируется вся картина всеобщей структурированности материи; принцип структурности как раз и ориентирует исследователя на познание объективной реальности посредством выявления и характеристики элементов и других структурных образований системы и их взаимосвязей. В результате реализации системного подхода сформировался классический, дисциплинарный подход к изучению мира, что выражается в дифференциации наук, изучающих тот ли иной объект. Такой подход был исторически необходим, так как правильного представления о целом нельзя получить без познания его частей. Но углубление представления о физической реальности, реализуемого в физической картине мира; осмысление роли техники в современном мире; научные революции конца XIX – начала XX вв.; усложнение социальных форм организации науки; формирование междисциплинарных областей знания, понятий, подходов, «научных достижений»; серьезные перестройки, новые структурирования «научного пространства» на каждом этапе развития науки неизменно возвращали метанаучную мысль к исследованию проблемы единства научного знания. Становилось очевидным, что классический, дисциплинарный подход не дает возможности раскрыть более глубокие закономерности, присущие широкому классу взаимосвязанных явлений, не говоря уже о том, что он оставляет в тени взаимосвязь, существующую между разными классами явлений, каждый из которых был предметом обособленного изучения отдельной науки. Идея структурного единства мира, гомоморфизма и даже изоморфизма самых различных классов явлений все более овладевала современным научным мышлением.

Поэтому наряду с дифференциацией науки усиливается ее интеграция, основанная на объединении научных методов и на установлении общих закономерностей системного единства науки. Складывается такая интегративная тенденция в современной науке, которая выражает стремление познать объект как целое; знание объектов становится по сути результатом совокупной междисциплинарной познавательной деятельности,

[72] Аверьянов А. Н. Системное познание мира: Методологические проблемы. – М.: Политиздат, 1985. – С. 43.

которая направляется определенными регулятивными принципами, аккумулирующими ее опыт и выражающими объективные закономерности развития научного и технического знания в междисциплинарном (системно-структурном) подходе. Данный подход представляет собой когнитивное образование в качестве некоторой системы или же в качестве определенного компонента более обширного когнитивного образования, которое, в свою очередь, может быть рассмотрено как система более высокого ранга. В конечном счете научное знание предстает перед методологом в качестве сложной иерархической системы, где все компоненты и уровни органически взаимосвязаны. Проблема единства научного знания выступает, по существу, как частный случай проблемы системности в целом. Это значит, что категории целое и часть выполняют важную методологическую функцию и используются для решения конкретных задач познания, отражая ступени развития наших знаний об объекте через такие основные свойства научного знания, как расчлененность и связанность, дискурсивность и целостность. Они находят свое концептуальное оформление в категориях системы и структуры, которые концентрируют вокруг себя целое «облако» специальных понятий: элемент, связь, когнитивная структура, организация, структурный уровень, уровень организации, форма организации, функция, функциональный уровень и т.д.

Возникновение системного метода научного исследования связано с именем австрийского биолога-теоретика Л. фон Берталанфи, сформулировавшего в конце 40-х годов XX в. программу построения общей теории систем, автора фундаментального труда «Общая теория систем» (1968). Следует отметить, что еще в 20-х годах XX в. перспективность данного метода обнаружилась в одной из первых разработок ряда его фундаментальных понятий в книге А. А. Богданова «Всеобщая организационная наука (тектология)». Особенный интерес к исходным посылкам, концептуальной основе и концептуальному аппарату системного анализа, к вопросам развития системного метода наблюдается в научном мире последние три десятилетия: широко используются методы формальной логики, теории множеств, теории групп, способные выразить системную природу научного знания, а также создаются специальные системные методы и языки типа общей теории систем и тернарной алгебры[73]. Согласно системному подходу развивающаяся и функционирующая система, скажем, механистическая картина мира, являясь предельным случаем (в смысле принципа соответствия) более широкой релятивистской картины мира, в своих функциях неизбежно подчиняется целям этой последней (более широкой) системы, общие регулятивы ее развития могут быть поняты только при рассмотрении этого функционального подчинения. Этот абстрактный системный принцип указывает нам путь к пониманию природы высших норм, определяющих человеческое познание, а настоятельная необходимость в системно-структурном подходе возникает там, где ставится задача изучить и логически реконструировать научное знание по его интегративным характеристикам, которые не могут быть осмыслены в рамках других подходов.

Понятие «система» означает целостное образование; хотя оно и состоит из частей и его функционирование существенно зависит от свойств и характеристик этих частей, но система представляет собой принципиально новое (по отношению к частям) дискретное образование, обладающее особыми, только ему присущими синтетическими качественными характеристиками, не присущими образующим его компонентам. Совокупности предметов и явлений, которые по приведенному выше определению системами не являются, некоторыми исследователями называются агрегатами[74]. Таким образом, целое характеризуется такими специфическими параметрами и законами, которые не присущи отдельным его элементам. Отсюда вытекают два важных методологических вывода:

1) несводимость целого к сумме частей, то есть неаддитивность свойств системы как целостного образования;

---

[73] См.: Садовский В. Н. Основания общей теории систем: Логико-методологический анализ. – М.: Наука, 1974. – 279 с.; Уёмов А. И. Системный подход и общая теория систем. – М.: Мысль, 1978. – 272 с.; Уёмов А. И. Структура системного подхода и пути развития общей теории систем. // Ergo… - Екатеринбург, 1995. – Вып. 2. – С. 116-122.

[74] Рузавин Г. И. Методы научного исследования. – М.: Наука, 1975. – С. 7-13.; Рузавин Г. И. Научная теория: Логико-методол. анализ. – М.: Мысль, 1978. – 244 с.; Рузавин Г. И. Синергетика и принцип самодвижения материи // Вопросы философии. – М., 1984. – № 8.; Рузавин Г. И. Метод принципов в «Математических началах натуральной философии» И. Ньютона//Философские науки. – М., 1987.– №12. – С.22-31; Рузавин Г.И. Системный подход и единство научного знания // Единство научного знания. – М., 1988. – С. 237-252.

2) невозможность исчерпать сущность целого путем исследования частей, элементарных процессов.

Целое нельзя понять как функционирующее только на основе законов составляющих его элементов; в западной литературе свойства, присущие только системам, называют «эмерджентными», а концепцию системы, акцентирующую внимание на несводимости характеристик целого к характеристикам частей, называют «холизмом».

Характеристика системного подхода дана Г. И. Рузавиным: «В широком смысле слова под системным подходом понимают такое направление исследований, при котором изучаемые объекты рассматриваются как определенные целостные образования, стоящие из частей, элементов и компонентов, взаимодействующих друг с другом таким образом, что в результате возникают новые свойства или качества, несводимые к совокупности составных частей… Таким образом, для системного подхода характерно именно целостное рассмотрение, анализ взаимодействия составных частей предметов и процессов, несводимость целого к сумме частей»[75].

Теоретическая модель образования и функционирования физической картины мира как системы предполагает:

1) наличие существенных и органических связей фактов, законов, физических теорий как ее структурных компонентов, фиксируемых в философских принципах как основаниях синтеза физической картины мира в системе онтологических утверждений и допущений;
2) преобладание роли внутренней связи физических теорий как структурных компонентов данной физической картины мира по отношению к их внешним связям (с теориями в других физических картинах мира);
3) активно преобразующее влияние физической картины мира на свои компоненты (факты, законы, теории), в результате которого они приобретают новые качества, необходимые для оптимального функционирования системы;
4) устойчивость свойства системности, обеспечивающую синтез физической картины мира как сложноорганизованной системы в изменяющихся условиях.

---

[75] Рузавин Г. И. Системный подход и единство научного знания // Единство научного знания. – М., 1988. – С. 241.

«Система – это совокупность элементов, находящихся во взаимодействии и необходимой взаимосвязи, образующей целостную устойчивую структуру. В этом определении фиксируется и расчлененность системы на отдельные относительно самостоятельные образования, и необходимая взаимосвязь их, обеспечивающая устойчивость существования, и наличие целостности, и, наконец, функциональность, активное поведение элементов по отношению друг к другу, то есть их взаимодействие в рамках соответствующей структуры»[76].

Системный подход становится ключевым понятием современного взгляда на мир. Более того, системный подход всегда был свойственен фундаментальным естественнонаучным исследованиям. В химии эту традицию развивал Д. И. Менделеев, который в своей периодической системе сумел объединить все многообразие достижений химической науки за сто лет; в теории химического строения А. М. Бутлеров развил методологию системного интегрирования эмпирического материала. Полученные классификационные системы во многом базировались на господствовавших в конце XIX в. теоретических представлениях о строении и организации целостности вещества. Хорошо известны были лишь два вида частиц – атомы и молекулы, о микрочастицах известно было немногое. Поэтому знание об атомах и молекулах служило основой для объяснения внутреннего механизма образования целостности. В физике того периода еще господствовал макроскопический подход к исследуемым объектам. Непосредственным предметом физики были, собственно говоря, не сами атомы и молекулы, а скорее, атомно-молекулярное вещество и макроскопические процессы изменения его. Именно через раскрытие связи между свойствами, составом и строением макровещества физика и химия пришли к выводу о необходимости существования атомов и молекул как элементов вещества и о наличии между ними определенных взаимодействий, взаимосвязей различных типов и природы, обусловливающих в конечном счете его макроскопические свойства. Иными словами, становление принципа системности шло по пути изучения проблемы целостности и типов целостности через выявление специфической природы связей частиц.

[76] Шептулин А. П. Принцип системности // Науч. докл. Высш. шк.: Филос. науки. – М., 1985. – №5. – С. 61.

С появлением в начале XX века субатомной физики, органической химии и теории химического строения вещества системный подход стал приобретать более выраженный характер. Так, А. М. Бутлеров сумел экспериментально доказать и теоретически обосновать необходимость преодоления ограниченности количественно-суммативного понимания целостности, когда целое определялось как сумма частей, а часть являлась некоторым его количеством[77]. Он показал, что качество молекулы имеет системные характеристики и определяется ее внутренним содержанием, количеством элементов, природой связей, порядком расположения атомов, их химическим строением. В зависимости от местоположения в структуре системы атомы по-разному могут оказывать влияние друг на друга в процессе синтеза.

В системе академика В. И. Вернадского воссоздана целостность биосферы путем объединения геологической истории Земли с историей живой материи. В понятии ноосферы он учел влияние технологической деятельности людей на биосферу. В XX веке во многом благодаря именно В. И. Вернадскому системность в исследованиях земно-космических взаимосвязей приобрела характер всеобщего методологического принципа. Эмпирическое обоснование этот принцип получил вначале в геобиохимии, затем в учении о биосфере, активно взаимодействующей с литосферой, гидросферой, атмосферой путем самоорганизации и саморегуляции[78].

По существу, естествознание, начиная с разработки атомистических идей в физике, активно использует и развивает универсальный системно-структурный подход к объектам реального мира.

На этом фоне особое значение приобретают опубликованные в различные годы классические образцы системного познания мира в философии русского космизма и антропокосмизма[79],

---

[77] См.: Бутлеров А. М. Научно-популярные и исторические работы по химии // Соч. – М., 1958. – Т. 3 –429 с.

[78] См.: Вернадский В.И. Химическое строение биосферы Земли и ее окружения. – М., 1987. – 339 с.

[79] Русский космизм: Антология философской мысли / [Сост. и предисл. к текстам С. Г. Семеновой, А. Г. Гачевой; Вступ. ст. с. 3-33 С. Г. Семеновой; Примеч. А. Г. Гачевой]. – М.: Педагогика-пресс, 1993. – С. 168

философии всеединства Н.Ф. Федорова[80] и П.А. Флоренского[81], тектологии А.А. Богданова[82]. Эти исследования позволяют представить принцип системности в особом роде мировоззрении, миропонимании и философской концепции, оценить его возможности как общенаучной методологии синтеза в тех гносеологических и поисковых ситуациях в науке, когда объектом познания становятся (осознано или интуитивно) системные образования. Здесь особое место отводится философским компонентам науки как единого целого. По мысли Н.Г. Чернышевского, философские, этические концепции не являются нейтральными по отношению к научному познанию, а органически присущи воззрениям ученых, вплетаются в ткань научной теории и влияют на общее развитие науки, обуславливая ее просветительскую ориентацию. Собственно объяснительные и эвристические возможности принципа системности нашли отражение в работах Г.Я. Ярошевского, посвященных изучению научного наследия одного из основателей мировой и отечественной психологии Л.С. Выготского[83]. Эти взгляды созвучны современным понятиям эпистемологии и науковедения о том, что формирование системного единства научного знания следует рассматривать в широком аспекте исторического развития культуры. И чем сложнее системное образование, тем более выраженным становится системный подход при его познании.

Широкое распространение этого подхода к изучаемым явлениям в физике позволило осмыслить с помощью физической картины мира как особой системы понятий и методов исследования данные современной физики, объединив их и объяснив в наиболее общей физической теории. А само системное знание в философии науки в собственном смысле по-видимому стало формироваться со второй половины XIX в., «когда утвердившиеся в XVII – XVIII вв. механистические принципы опытных наук перестали удовлетворять их возросшему уровню, когда все острее чувствовалась потребность в генеральной

[80] См.: Федоров Н. Ф. Сочинения / Вст. ст. 5-50, прим. И сост. С. Г. Семеновой. – М.: Мысль, 1982. – 711 с.

[81] См.: Флоренский П. А. Время и пространство // Социол. исслед. – Л., 1988. – №12. – С. 108-113.

[82] См. Богданов А. А. Тектология: Всеобщая организационная наука.– М., 1989. – Кн. 1. – 304 с. – Кн. 2. – 352 с.

[83] Взаимодействие наук. Теоретические и практические аспекты / Б.М.Кедров, П. В. Смирнов, Б. Г. Юдин и др.; Отв. ред. Б. М. Кедров, П. В. Смирнов. – М.: Наука, 1984. – С. 69–82.

разработке новых, более гибких принципов методологии и когда великие завоевания в области физики, геологии, биологии, химии, науке о психических явлениях и т.д. намечали контуры этой новой, более глубокой и цельной методологии наук»[84].

Таким образом, возникновение самого системного метода и его применение в науке характеризует значительную возросшую зрелость современного этапа ее развития. Это проявляется, в частности, в том, что междисплинарный подход, сменивший дисциплинарный, стал все шире применяться для установления связей и закономерностей, присущих разным областям явлений. Исследуемый объект стал рассматриваться как целостная, определенным образом организованная система компонентов, обладающая значительной степенью устойчивости. Поэтому синтезирующая роль принципа системности основывается на возможности единства, общих характеристик у объектов различных структур и уровней организации, а свойства данной системы как целого зависят от природы исходных компонентов, их количества, способов их связи и взаимодействия.

Сложный объект в целом никогда сразу понять невозможно. Поэтому познание объекта в целостности означает синтез ранее полученных об объекте знаний, их объединения или, точнее говоря, логической организации всего наличного знания, относящегося к изучаемому теорией кругу явлений, в структуру внутренних связей, образованных из взаимосвязанных, взаимодействующих и взаимопроникающих компонентов. Так, основные требования дополнительности (комплементарности) как междисциплинарного подхода научного исследования можно сформулировать следующим образом: для воспроизведения целостности явления на определенном этапе его познания следует применять взаимоисключающие и взаимоограничивающие «дополнительные» классы понятий, которые могут использоваться обособленно в зависимости от конкретных (экспериментальных и других) условий, но только взятые вместе исчерпывают всю поддающуюся определению и передаче информацию. Качественное своеобразие такой системы определяется не столько природой составляющих ее компонентов, сколько способами связей, организацией их в целостную устойчивую систему. Представление о сложноорганизованном

[84] Белов П. Т. Философия выдающихся русских естествоиспытателей второй половины XIX – начала XX в. – М., 1970. – С. 7

объекте физической картины мира как системе выдвигает и такие теоретико-методологические и специально разрабатываемые вопросы прикладного характера как определение оптимальных вариантов построения физической картины мира, классификация теорий, структурных компонент, в свою очередь также являющихся сложноорганизованными объектами.

Поэтому ограниченность (отличие) принципа системности (целостности) по отношению к принципу структурности заключается в том, что в основном применяется для оперирования с уже полученным знанием.

Но на этом пути, в связи с необходимостью перехода от знания о частном к знанию об общем (едином) возникает целый ряд методологических проблем. Первое – это проблема объекта физической картины мира и объектов физических теорий.

Каким образом на основе принципа системности получить целостное знание? Как пишет Г. П. Щедровицкий, «нельзя решить проблему синтеза, оставаясь в плоскости одних лишь имеющихся данных. Решая задачу синтеза различных знаний об одном объекте, нужно, вместо того, чтобы искать какие-то связи между ними в их собственной плоскости, воспроизвести каким-то образом структуру объекта, а затем, исходя из нее, восстановить те повороты абстракции, которые привели к имеющимся знаниям» [85].

Как считает Б. М. Кедров[86], для создания общей теории необходимо преодолеть барьеры узкой специализации, мешающие комплексному подходу к изучению физических процессов. А узкая же специализация обусловлена тем, что различные науки не всегда развивались в достаточной связи друг с другом и, естественно, без всякой ориентировки на последующий синтез.

В такой ситуации первый шаг в синтезе физической картины мира должен состоять в том, чтобы перестроить сами исходные представления и знания, освободить их от некоторых элементов

[85] Щедровицкий Г. П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок // Системные исследования: Методологические проблемы. Ежегодник. – М.: Наука, 1981. – С. 193-227.

[86] См.: Кедров Б. М. Методологические проблемы естествознания (о теоретическом синтезе в современной науке) // Диалектика и современное естествознание. – М.: Наука, 1970. – 454 с.; Кедров Б. М. О синтезе наук // Вопросы философии. – М., 1973. – №3.; Кедров Б. М. Научные революции: (Сущность. Типология. Структура. Механизм. Критерии). – М.: Знание, 1980. – 64 с.; Кедров Б. М. Взаимодействие наук как общественная проблема // Методологические проблемы взаимодействия общественных, естественных и технических наук. – М., 1981 (б).

содержания, то есть сделать их теоретически однородными (редуцируемыми) и объединяемыми. Этого не сделать без унификации понятийного аппарата физической науки, создания «сквозной системы понятий». Так, при построении механистической картины мира, поначалу далекие друг от друга области знания объединялись при постановке общих задач и выработке общих понятий и идей, единой терминологии.

С позиций системности, единства и целостности научного знания становится возможным правильно подойти к решению таких проблем, как редукция, или сведение одних теорий естествознания к другим, синтез кажущихся далекими друг от друга теорий, их подтверждение и опровержение данными наблюдений и экспериментов. Такая допустимая теоретическая процедура была применена и И. Ньютоном при создании механики и теории гравитации, которые продемонстрировали единство законов движения земных и небесных тел. Аналогично этому использование спектрального анализа для установления единства химических элементов в структуре небесных тел было крупным достижением в физике. Однако, необходимо учитывать ограничение применения редукции, используемой только для объяснений однотипных явлений.

Особый интерес для исследования принципа системности представляет проблема системного единства научного знания: интеграция и смена научных парадигм с развитием междисциплинарности. Вопрос о смене научных парадигм по мере их междисциплинарной интеграции, усложнения был поставлен в западной методологии Томасом Куном как сугубо интернаучное явление. По Куну, интеграция наук, появление комплексных дисциплин так или иначе приводят к смене господствующей парадигмы стержневой науки, вокруг которой формируется новая область знания[87]. Абсолютизируя, факт смены одних концепций другими, казалось бы, несовместимыми с предыдущими (что как раз и имеет место в научных революциях), П. Фейерабенд заявил, что вообще «наука представляет по сути анархическое предприятие»[88].

[87] Кун Т. Структура научных революций / Т. Кун; пер. с англ. И.З. Налетова; Общ. ред. и послеслов. [С.274-292] С. Р. Микулинского и Л. А. Марковой. – 2-е изд-е. – М.: Прогресс, 1977. – 300 с.

[88] Фейерабенд П. Избранные труды по методологии науки / Пер. с англ. и нем. А. Л. Никифорова. – М.: Прогресс, 1986. – С. 147.

Таким образом, процесс смены одних концепций другими может сопровождаться кризисом. Но Л.С. Выготский вскрывает иные детерминанты кризисных явлений. Кризис, по Выготскому, зарождается не при столкновении новых фактов с господствующей структурой знаний, а при назревании порождаемой и стимулируемой практикой потребности в переходе от частных теоретических схем к более общим, вводящим эти частные схемы в контекст, в котором эти понятия-факты обнаруживают свой глубинный категориальный смысл, а по Куну, между старой парадигмой и новой нет ни общности, ни связи. Между ними не может быть отношений включения – одна исключает другую. Таким образом, Выготский отвергает позитивистское представление о единстве научного знания как синтезе «чистых фактов» (в основе которого лежит версия, что источником познания служат «сенсорные данные», а не отображаемая в чувственном опыте и постигаемая посредством сознания объективная реальность), так как считает, что исследователь может оперировать только такими фактами, которые прошли понятийную обработку, а поскольку этот процесс исходит от мышления, погруженного в независимую от него сложную объективную среду, то понятийная обработка эмпирических данных представляет собой более содержательную (чем на допонятийном уровне) познавательную реконструкцию этого объекта[89]. Прослеживая эволюцию некоторых крупных психологических школ (психоанализа, рефлексологии, гештальтпсихологии и персонализма), Выготский обнаруживает закономерную тенденцию, суть которой состоит в отщеплении идеи от понятия; фундаментальная идея сперва соединяет психологию с другими науками, а потом, включаясь в ту или иную философскую систему, разбухает как «лягушка, раздувшаяся в вола», до масштабов универсального принципа и целого мировоззрения. Так идея легче всего обнаруживает свою социальную природу, выступая более как факт философский, чем как факт научный, и по каналам мировоззрения воздействует на ход научного развития.

Таким образом, в рамках системного подхода создается конкретизирующий общенаучный уровень физической картины мира. На этом уровне категория деятельности задается как

[89] Выготский Л. С. Исторический смысл психологического кризиса: Методологическое исследование // Выготский Л. С. Собр. соч. – М., 1982. – Т. 1. – С. 295.

определенная *структура*, элементами которой являются субъект деятельности и блок сопряженных с ним категорий: его целеполагание, интериоризированные (превращенные в идеальную форму и в этой форме усвоенные субъектом) средства и способности, оперативно-методологические предписания. Другую часть структуры деятельности составляют объективные факторы: исходный материал преобразования (теоретическое положение), продукт преобразования, орудия преобразования и преобразовательские действия.

Представление деятельности как структуры основано на представлении ее как процесса. Вне этой связи невозможно раскрыть генезис и историческое движение структур деятельности. Поэтому философское рассмотрение деятельности является необходимым условием ее структурного анализа. «Естественное» движение инструментовки познания и деятельность ученого, организующего эту деятельность путем системотехнического действия, становятся компонентами единой системы. Способ функционирования такой системы непосредственно задается ее социальной обусловленностью. Иными словами, учет соответствующей роли ценностных элементов науки, с необходимостью обуславливающих синтез физической картины мира, позволяет проводить четкое различение между природой как независимым от сознания науки объектом и физической картиной мира, которая связана с уровнем познавательной способности и имеет возможность быть социально обусловленной.

Эту социальную обусловленность можно было не учитывать, когда теория была неразрывно сращена с методологией. Она входила в познавательную деятельность без особой фиксации, благодаря самому факту сращения. Другое дело, когда – в связи со взаимным отчуждением этих двух слоев познания – их единство приходится *специально организовывать*. Здесь необходим аппарат, социальная детерминация которого является определяющим условием функционирования самой системы. Поэтому усложняется картина взаимодействия физического знания с философией.

Таким образом, категория «физическая картина мира» – философская по своим масштабам экстраполяций и «антифилософская» по своему генезису и логической функции, – составляет основу для категориального аппарата логического конструирования мира как мысленной целостности.

Суть принципа системности, как отмечалось выше, заключается в учете знаний обо всех факторах, влияющих на целостный объект, на его функционирование и развитие. Это трудная и сложная методологическая задача, обусловленная сложностью объекта. Чтобы избежать ошибки, необходимо исходить из требования всесторонности познания, хотя это требование и не может быть соблюдено абсолютно. Но такой подход предостерегает от абсолютизации уже имеющихся знаний, не позволяет успокаиваться, требует рассмотрения полученных знаний как этапа на пути к более полному знанию.

По существу, вся история физики – это движение к системности, постепенное преодоление односторонних физических концепций, а процесс познания природных систем может быть успешным только тогда, когда в них части и целое будут изучаться не в противопоставлении, а во взаимодействии друг с другом, анализ будет сопровождаться синтезом. Таким образом, преодоление односторонности означало бы появление единой физической картины мира как междисциплинарной по своей сути концепции, связывающей между собой психологические, лингвистические, социологические и семиотические идеи в единую систему.

Таким образом, качественная специфика сложных материальных образований в процессе синтеза физической картины мира не может просто постулироваться на основе отличия одной предметной области от другой, а должна быть понята как результат закономерного усложнения онтологического коррелята, выводимого теоретическим путем из всей совокупности физических знаний с помощью фундаментальных (исходных) принципов системности и симметрии как гносеологических оснований конструктивности физических знаний.

МАНУЙЛОВ В.Т.
(*Курск)*

КОНСТРУКТИВНОСТЬ КАНТОРОВСКОЙ «НАИВНОЙ» ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ*

Резюме

Конструктивизм в математике традиционно рассматривается как антитеза теоретико-множественному обоснованию математического знания. В статье показано, что в структуре канторовской «наивной» теории множеств может быть выделена часть (теория трансфинитных ординальных чисел), при обосновании которой используются генетические методы введения объектов теории (три «принципа порождения»), аналогичные методам, используемым сторонниками конструктивизма в математике, что позволяет говорить о «конструктивной» части канторовской «наивной» теории множеств и о конструктивности ее. Указывается отличие «канторовской конструктивности» от традиционных видов конструктивности, выделяются гносеологические основания этого вида конструктивности.

Канторовское теоретико-множественное обоснование математики, логицизм и аксиоматические теории множеств допускают в качестве важнейших принципов построения объектов математической теории **абстракцию абсолютной (логической) осуществимости** и связанную с ней **абстракцию актуальной бесконечности**[1]. Различение этих трех крупных направлений в обосновании математики связано прежде всего с разложением единого поля теоретизирования (математика + основания математики + философия), характерного для классической математики (частью которой является **наивная теория множеств** Г. Кантора), на относительно самостоятельные замкнутые области (математика; основания математики; философия). Соответственно этому различению в каждом из указанных направлений приобретают особый смысл термины **абстракция абсолютной (логической) осуществимости** и **абстракция актуальной бесконечности.**

Канторовская **наивная** теория множеств формируется в рамках рационалистической **картины мира,** восходящей к

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 01-06-80278

[1] См. Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. – М.: Наука, 1967. – 164 с.

философским системам Просвещения. В этой **картине мира** не было места субъекту и его деятельности. Критерием объективности какой-либо области знания считалось полное исключение любых ссылок на деятельность субъекта. Поэтому, например, вероятностные закономерности статистической механики расценивались как недостаточно объективное знание, которым мы должны довольствоваться вследствие несовершенства наших познавательных способностей, не позволяющих описывать состояние физической системы только на основе законов движения каждой частицы. Аналогичные взгляды имели место и в области математики: здесь безраздельно господствовал так называемый **математический платонизм** или **концептуальный реализм**[2]. В основе этой концепции лежит убеждение в самостоятельном, полностью независимом от человеческой деятельности существовании математических объектов: чисел, функций, множеств, операторов и т.д. Математик лишь **открывает** и **описывает** свойства этих объектов подобно тому, как географ открывает и описывает неизвестный ранее материк. Вопрос о познавательных способностях, позволяющих субъекту устанавливать свойства математических объектов, как и вопрос о критериях совпадения наших знаний о математических объектах со свойствами самих этих объектов, вообще серьезно не ставился. Теоретико-познавательную основу математического платонизма составляет **принцип предустановленной гармонии** разума и мира[3]. Катасонов В. Н. выделяет в данной связи у Лейбница **принцип законопостоянства**, с помощью которого Лейбниц обосновывал **предустановленную гармонию** (как свидетельство совершенства Творца и гарантию его познаваемости)[4]. Согласно этому принципу разум сам в себе имеет критерий своего обоснования; мысль, корректно построенная в соответствии с самоочевидными для разума правилами, оказывается одновременно истинной; между разумом и миром имеется изначальное принципиальное соответствие. Такая концепция соотношения мысли и мира наиболее характерна для

---

[2] См.: Stephen F. Barker. Realism as a Philosophy of Mathematics// Foundations of Mathematics. Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel. – Berlin; Heidelberg, New-York: Springer-Vrl., 1969. – P. 1-9; А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел. Основания теории множеств. – М., 1966. – С. 399-400; Бурбаки Н. Исторический очерк//Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – С. 317.

[3] Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975. – С. 125

[4] Катасонов В. Н. Метафизическая математика XVII века. – М.: Наука, 1993. – С. 36-37.

рационализма Нового времени (Декарт, Спиноза, Лейбниц). Канторовская теория множеств формируется именно под влиянием математического платонизма и принципа предустановленной гармонии. Это влияние совершенно определенно подчеркивает Г. Кантор в своей работе «Основы общего учения о многообразиях»[5]. Создатель учения об актуально-бесконечных множествах различает два вида реальности математических объектов: а) **интрасубъективная** или **имманентная** реальность, которая состоит в том, что математические объекты считаются «действительными постольку, поскольку они занимают на основе определений вполне определенное место в нашем рассудке, вполне ясно отличаются от всех остальных составных частей нашего мышления, находятся к ним в определенных отношениях и, таким образом, определенным образом видоизменяют субстанцию нашего духа», и б) **транссубъективная** или **транзиентная** реальность, состоящая в том, что объектам приписывается «реальность также постольку, поскольку их приходится рассматривать как выражения или отображения процессов и отношений во внешнем мире, противостоящем интеллекту, поскольку, далее, различные числовые классы (I), (II), (III) и т.д. оказываются представителями мощностей, которые фактически встречаются в телесной и духовной природе»[6].

Далее Кантор отмечает, что «оба эти виды реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих, отношениях и транзиентной реальностью»[7]. Что же является основанием для утверждения такого совпадения? «Эта связь обеих реальностей имеет свой собственный корень **в единстве всего, к которому мы сами принадлежим»**[8]. Принцип единства мира действительно является основанием совпадения наших мыслей с реальностью. Но как понимается, как обосновывается сам принцип единства мира? Ф. Энгельс, выступая против попытки Дюринга объяснить единство мира из возможности охватить все существующее одной мыслью,

[5] Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном / Георг Кантор. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – С. 63-101.
[6] Там же, с. 79.
[7] Там же, с. 79.
[8] Там же, с. 79.

ссылается на общественно-историческую практику: «Действительное единство мира состоит в его материальности, а эта последняя доказывается не парой фокуснических фраз, а длинным и трудным развитием философии и естествознания»[9]. Для Г. Кантора «единство всего, к которому мы сами принадлежим», есть метафизический принцип, единственное назначение которого – позволить вывести … «важное… следствие для математики, а именно, что последняя при развитии своих идей **должна считаться единственно лишь с имманентной** реальностью своих понятий и поэтому не обязана вовсе проверять также их **транзиентную** реальность»[10]. Полная свобода относительно ограничений транзиентной реальностью является по Кантору отличительной особенностью именно **чистой** математики, в отличие от прикладной математики и естественных наук, которые «**метафизичны** как в своих основах, так и в преследуемых ими целях», т.е. подвержены философскому контролю, требующему обоснования совпадения их положений с транзиентной реальностью[11]. «Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем… условием, что ее понятия должны быть непротиворечивы, а также должны находиться в неизменных, установленных определениями отношениях к образованным ранее и уже имеющимся налицо испытанным понятиям»[12]. «Процесс правильного образования понятия… повсюду один и тот же: берут некоторую, лишенную свойств вещь, которая первоначально есть не что иное, как имя или знак А, и придают ему закономерным образом различное, даже бесконечно многие понятные предикаты, значения которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяются отношения А к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия А, и оно появляется на свет, снабженное такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать как понятие. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом

---

[9] Энгельс Ф. Анти-Дюринг / Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения: в 30-ти т. – 2-е изд. – Т.20. – С. 43.

[10] Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном. – С. 80.

[11] Там же, с. 81.

[12] Там же, с. 80.

метафизики»[13]. Таким образом, по Кантору, чистое математическое знание совершенно свободно от всяких предпосылок философского характера; развитие математики должно подчиняться лишь критерию внутренней, имманентной непротиворечивости; сама **свобода** чистой математики основана на принципе полного совпадения двух видов реальности (имманентной и транзиентной), т.е., по существу, на **принципе предустановленной гармонии**[14]. Однако в приведенном выше описании процесса «правильного образования понятий» уже заметно некоторое методологическое ограничение, характерное именно для конструктивных тенденций в обосновании математики и позволяющие говорить о «канторовской конструктивности». Но это методологическое ограничение сформулировано настолько неопределенно, что оказывается в принципе невозможным отличить «конструктивное» от «неконструктивного» в рамках канторовской теории множеств. Поэтому и оказалось, что «конструктивные» компоненты Канторовского **учения о многообразиях** (иерархия трансфинитных чисел) *затерялись* в дальнейшем в массе произвольных, ограниченных лишь требованием непротиворечивости построений математических множеств.

Появление конструктивистских концепций в начале XX века связано теснейшим образом с революцией в науке, прежде всего, в естествознании; обнаружение противоречий канторовской теории множеств послужило лишь толчком для пересмотра философских оснований, на которых строилась классическая математика. Идеи конструктивного обоснования математики выдвигаются как антитеза **математическому платонизму** и **принципу предустановленной гармонии.** Как основополагающая идея конструктивизма в обосновании математики выдвигается *принцип активности субъекта* в познании математических объектов.

Как отмечает А. Брайткопф, конструктивизм в основаниях математики (в широком смысле) и логический реализм (платонизм) отличаются концепциями **онтологического** статуса логических и математических сущностей (натуральных чисел,

[13] Там же, с. 103–104.

[14] О сложных проблемах взаимоотношения мотивов математической свободы творчества и теологических оснований математики см.: Катасонов В. Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. – М.: Мартис, 1999. – С. 145-146.

функций, множеств, понятий, высказываний и т.д.)[15]. Логический реализм признает независимое от мышления человека и его возможных методов познания существование этих объектов. Посылка **транзиентной** реальности математических объектов может быть обоснована различным образом; согласно Г. Фреге она есть допущение объективности логических и математических суждений; по К. Геделю она, напротив, обосновывается тем, что только на ее основании возможна адекватная систематизация математического познания[16].

Операциональное (конструктивное) значение тезиса логического реализма для обоснования логики и математики состоит прежде всего в том, что из посылки независимого существования математических объектов логически выводятся такие свойства объектов, которые «не могут быть приписаны им на основе чисто **имманентного** существования. **Истинностная определенность** каждого осмысленного математического предложения и **tertium non datur** для **импредикативно определенных понятий** суть важнейшие примеры таких свойств»[17].

Конструктивизм в философии математики прежде всего характеризуется тем, что он устраняет это применение тезиса логического реализма (истинность которого, впрочем, объявляется неразрешимой проблемой) и требует обоснования математики независимо от онтологических предпосылок. Конструктивизм, однако, может быть связан с онтологическим тезисом, гласящим, что действительно существуют только имманентно данные объекты[18].

Вместе с тем, указанным различением конструктивизм не определяется ни полностью, ни достаточным образом. Различные точки зрения на то, в чем состоит внутренняя (имманентная) реальность математических объектов имеет следствием возникновение не редуцируемых друг к другу вариантов конструктивизма. «Важнейшие концепции, исходящие из

---

[15] Breitkopf H. Untersuchungen über den Begriffen des finiten Schlieβens: Inaugural – Diss. – München: Lüdwig–Max–Universität, 1968. – 90 S. См. также Перминов В. Я. Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

[16] Ibid., S. 9

[17] Ibid., S. 9

[18] Ibid. S.9

всеобщего конструктивного подхода, суть предикативистский подход, интуиционизм и финитизм»[19].

Таким образом, **абстракция абсолютной (логической) осуществимости** в канторовском теоретико-множественном обосновании математики выступает прежде всего как **регулятивный принцип**, ограничивающий познавательную активность субъекта Лейбницевым объединенным формально-логическим законом **тождества – непротиворечия – исключенного третьего – достаточного основания,** играющим одновременно роль конституирующего принципа объективного мира.

В начале XX века **наивная** теория множеств рассматривалась как основная базисная математическая теория, к понятиям и законам которой сводятся понятия всех остальных математических теорий (арифметики, геометрии, алгебры, анализа). Основными неопределяемыми объектами этой теории являются абстрактные объекты – **множества**; основным неопределяемым отношением является **отношение принадлежности элемента множеству.** Рациональные числа рассматриваются как множества множеств натуральных чисел; натуральные числа трудами Г. Фреге также сводятся к множествам эквивалентных множеств. Всякое несамопротиворечивое условие определяет некоторое множество объектов, удовлетворяющих этому условию. Единственным критерием существования объектов (множеств) является их непротиворечивость. Предполагается, что для любого объекта и для любого множества имеет место по крайней мере одно и только одно из двух: или этот объект является элементом множества, или не является, причем никаких эффективных методов установления этого обстоятельства может и не указываться.

Бесконечные множества мыслятся, таким образом, как данные сразу всеми своими элементами (т.е. принимается **абстракция актуальной бесконечности).** Поэтому при доказательствах существования используется классическая логика в полном объеме (включая закон исключенного третьего для предложений с кванторами всеобщности и существования, описывающими бесконечные множества, и доказательство от противного для этих предложений).

---

[19] Ibid. S.9

Как уже было показано ранее, гносеологической предпосылкой канторовской теории множеств является **платонизм** или **логический реализм**: точка зрения, вообще исключающая как неуместные всякие ссылки на умственную деятельность в ходе математических рассуждений. Математическое исследование рисуется платонисту скорее как открытие уже готовых предметов, чем как творческое создание их.

Метод математического познания, культивируемый математическим платонизмом, составляет важную отличительную черту **аналитической философии математики** (analytische Wissenschaftstheorie der Mathematik), противопоставляемой в современной литературе конструктивной философии математики (konstruktive Wissenschaftstheorie der Mathematik)[20]. Этот метод характеризуется как «исследование» или «путь (метод) исследования» («die Forschung»[21] и «the way of research»[22]) в противоположность методу конструктивной философии науки (konstruktive Wissenschaftstheorie), характеризуемому как «представление» или «путь (метод) представления» («die Vorstellung»[23] и «the way of representation»[24]). К. Лоренц использует для различения двух этих методов термины: «теория мета-компетенции» (theory of meta-competence) – для первого метода, и «теория объект-компетенции» (theory of object-competence) – для второго. Теория мета-компетенции рассматривает знание посредством обеспечения **истинности предложений** об объектах; это знание есть результат следования директиве: «быть рациональным». Теория объект-компетенции предполагает получение знания только посредством представлений об объекте, т.е. объект-компетенция предполагает обязательное наличие объекта знания; метакомпетенция есть знание посредством описания, оно получается преимущественно в

---

[20] См., напр.: Wohlrapp H. Analytischer versus konstruktiver Wissenschaftsbegriff// Konstruktionen versus Positionen. Bd. II. Allgemeine Wissenschaftstheorie / Hgrs. von Lorenz K. – Berlin; N. Y.: Bruyter, 1979. – S. 348-377; Lorenz K. Science, a rational enterprise? Some remarks on the consequences distinguishing science as a way of presentation and science as a way of research // Constructivism and science / Ed. by Butts R. E. and Brown J. R. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1989. – P. 3-18.

[21] Wohlrapp H. Analytischer versus konstruktiven Wissenschaftsbegriff, S. 348-377.

[22] Lorenz K. Science, a rational enterprise? Some remarks on the consequences distinguishing science as a way of presentation and science as a way of research, p. 3-18.

[23] Wohlrapp H. Analytischer versus konstruktiven Wissenschaftsbegriff, S. 348-377.

[24] Lorenz K. Science, a rational enterprise? Some remarks on the consequences distinguishing science as a way of presentation and science as a way of research, p. 3-18.

отсутствие объекта[25]. К. Лоренц отмечает сходство своей концепции с идеями Б. Рассела о «знании посредством описания» (knowledge by description) и «знании посредством знакомства» (knowledge by acquaintance)[26]. Платонистская точка зрения является как раз примером теории мета-компетенции или «знания посредством описания»; грубо говоря, платонист рассматривает роль математика скорее как исследовательскую, чем как творящую, в то время как конструктивная точка зрения с необходимостью предполагает конструирование и реконструирование объекта в процессе получения знания.

Однако и при этих условиях имеется возможность как различения конструируемого и неконструируемого (в смысле А. Гейтинга[27]) в рамках теории множеств, так и выявления идеализаций, принимаемых платонистом в его концепции математической деятельности. П. Бернайс[28] выделяет два принципа, характеризующие платонистскую концепцию математической деятельности: **принцип единства** и **принцип аналогии, сходства.**

Платонист использует **принцип единства,** производя новые математические сущности посредством абстрагирования или собирания отдельных индивидов.

Принцип единства позволяет платонисту считать вновь вводимую сущность математическим объектом, отделенным от субъекта математики и независимым математически от процесса, посредством которого он был введен. Множество натуральных чисел, множество функций действительного переменного, множество решений определенного уравнения, – это некоторые математические сущности с таким же объективным существованием, как и конкретные вещи. Некоторые люди – или даже все человечество – могут не знать всех свойств этих вещей или могут не иметь никаких указаний относительно того, являются ли некоторые из этих множеств пустыми или нет; однако, с точки зрения платониста это характеризует человечество, но не математику. При формализации «наивной» теории множеств

[25] Ibid., p.4.
[26] Ibid., p.4.
[27] Heyting A. Some remarks on intuitionism // Constructivity in mathematics/ Ed. by Heyting A. – Amsterdam: North – Holland publishing Company, 1959. – P. 69-71
[28] См.: Posy C.J. Brouwer's constructivism // Synthese. – Dordrecht, 1974. – Vol. 27, № 1-2. – P. 125-159.

принцип единства находит свое выражение в **аксиом(ной схем)е свертывания**[29]**:**

$( )(Ey)(Ax)[x \in y \equiv F(x)]$**,**

где: ‘*F(x)*’ представляет собой любую ППФ, свободную относительно ‘*x*’ и не содержащую свободно ‘*y*’, а стоящая в начале пара круглых скобок заменяет цепочку кванторов всеобщности, связывающих все остальные свободные переменные формулы ‘*F(x)*’; символы ‘*(Ey)*’ и *‘(Ax)’* обозначают кванторы существования и общности соответственно.

Второй принцип – **принцип аналогии –** позволяет математику обращаться с новыми сущностями как с простыми единицами, то есть аналогично тому, как он может действовать с конкретными осязаемыми объектами. Более точно, принцип аналогии позволяет математику манипулировать представителями этих объектов в прямой аналогии со способом манипулирования представителями конечных объектов. Именно поэтому П. Бернайс называет теорию математики, основанную на этом принципе, «комбинаторной»[30].

Принцип единства позволяет математику ввести множество натуральных чисел как единичный математический объект. Но именно благодаря принципу аналогии математик имеет возможность обращаться с этим объектом так, как если бы он имел дело с некоторым конечным и, следовательно, разрешимым набором объектов; в теоретико-множественной арифметике – как если бы он имел дело с индивидуальным числом.

Принцип аналогии имеет в качестве непосредственного следствия неограниченную применимость закона исключенного третьего в рассуждениях о бесконечных предметных областях. Согласно этому следствию, мы можем рассматривать каждое из высказываний: «имеется бесконечно много пар близнецов среди простых чисел», «имеется пункт в десятичном разложении числа **π**», после которого следует набор цифр из семи семерок» и т.д. или как истинное, или как ложное. К. Поузи называет это следствие **принципом актуализированных возможностей**[31], так как платонист действительно утверждает, что возможность установления истинностного значения предложения равносильна установлению его. Поузи подчеркивает, что в данной

---

[29] Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966. – 172 с.

[30] См.: Posy C.J. Brouwer's constructivism // Synthese. – Dordrecht, 1974. – Vol. 27, № 1-2. – P.128-130.

[31] Ibid., P. 129

формулировке термин «возможность» не может быть точно определен по двум основаниям. Во-первых, последовательный платонист не имеет никаких канонических аксиом или понятийных определений относительно того, что он может доказать как непротиворечивое, а что не может; поэтому характеристика возможности в терминах непротиворечивости оказывается неуместной. Во-вторых, если высказывания в вышеприведенном примере оказываются фактически ложными, что не исключается платонистской концепцией, то в каждом случае неясными оказываются две претензии: трудно обосновать претензию на то, что данное фактически ложное высказывание является истинным в возможности, и, аналогично, претензию на то, что его истинностное значение может быть определено в возможности.

Но неопределенность возможности не мешает платонисту, так как указанное выше следствие свидетельствует о том, что понятие возможности попросту неуместно для платониста. Принцип аналогии позволяет ему рассматривать множество натуральных чисел или десятичное разложение числа π, как если бы они были развернуты неким всезнающим обозревателем, который может ответить на все вопросы посредством простого перебора (обозрения, просмотра) всей бесконечной совокупности. Такой обозреватель (идеализированный субъект, в нашей терминологии) не должен быть актуально всезнающим; он должен быть в состоянии сделать бесконечно много простых наблюдений или вычислений, – или иметь достаточно времени, чтобы сделать это, плюс один момент до наблюдения результата. В известном смысле платонист рассматривает математику как деятельность такого обозревателя (наблюдателя). Образ этого обозревателя позволил Брауэру и другим конструктивистам характеризовать платонистов как людей, верящих в «разрешимость всех проблем». Но такая оценка является ошибочной, так как указанное выше следствие принципа аналогии свидетельствует, что вопросы истинности и доказуемости для платониста являются полностью неуместными. «Понятие знания не имеет никакого статуса в математике платониста, а доказуемость занимает лишь второстепенное положение»[32].

[32] Ibid., p. 130.

«Приравнивание принципа разрешимости математических проблем логическому принципу исключенного третьего (tertium non datur), которое Л. Брауэр постулирует как чистый «результат сознания» («reine Besinnungsergebnisse»), содержащий неоспоримый элемент и с необходимостью вынужденно признаваемый каждым, кто его однажды понял, не является с точки зрения логического реализма (платонизма) ни в коем случае непосредственно очевидным. Наоборот, с этой точки зрения в данном случае речь идет о принципах с различным теоретическим статусом. **Tertium non datur** есть теоретический постулат, «закон истинного бытия» («Gesetz des Wahrseins») в терминах логической теории Г. Фреге; принцип разрешимости каждой математической теории, напротив, есть метатеоретический принцип. **Tertium non datur** есть онтологически обоснованное суждение о характеристике области математических высказываний (Г. Фреге обосновывает **tertium non datur** с помощью онтологического **постулата существования**); он утверждает, что или само высказывание ***p***, или его формальное отрицание $\neg \boldsymbol{p}$, есть некоторый факт (eine Tatsache); так как каждое осмысленное математическое предложение выражает математическое высказывание, оно поэтому в себе или истинное, или ложное. В противоположность принципу разрешимости каждой математической проблемы, tertium **non datur** является вовсе не математической проблемой, но истиной **a priori** о структуре предмета математики, которой должно руководствоваться каждое математической исследование. Принцип же разрешимости математических проблем относится к теоретико-познавательной проблеме возможности познания истинности высказывания. Представитель логического реализма, таким образом, мог бы указать Брауэру, что его фундаментальный принцип основан на путанице, на ошибочном смешении вопросов о предмете математике и о процессе познания человеческого духа. Брауэр мог бы возразить, что здесь действительно нет различий. Тем самым проблема применимости **tertium non datur** сводится к противоположности онтологических позиций, которая не может быть устранена посредством логических аргументов»[33].

Таким образом, принцип аналогии находит выражение в **абстракции актуальной бесконечности**, т.е. в **перенесении**

[33] Breitkorf H. Untersuchungen über den Begriffen des finiten Schließens: Inaugural – Diss., S. 13-14

законов классической логики (в частности, tertium non datur) на **рассуждения о бесконечных областях.**

В канторовской теории множеств можно выделить следующие способы введения объектов: 1) *явные* определения; 2) *генетические* определения (определения посредством построения): *определения через индукцию*; *индуктивные* или *рекурсивные* определения; 3) *косвенные* (имплицитные) определения, т.е. определения, посредством некоторой системы постулатов (аксиом). Поскольку здесь допускаются абстракции **абсолютной (логической) осуществимости** и **актуальной бесконечности,** генетические построения и явные определения по существу не различаются; как показано Фреге и Дедекиндом, всякое генетическое определение может быть преобразовано в явное, и всякое самонепротиворечивое явное определение рассматривается как некоторое построение, т.е. способы построения понимаются настолько широко, насколько это согласуется с отсутствием противоречий.

Косвенные (аксиоматические) определения могут вводить некоторый объект лишь в том случае, если доказана непротиворечивость определяющей системы постулатов (аксиом). Признание непротиворечивости единственным критерием существования конструируемых определением объектов (**принцип абсолютной осуществимости**) равносильно тому, что в **платонистском мире возможность** установления истинностного значения высказывания отождествляется с **установлением** его. Но в каком случае имеется такая возможность? Этот вопрос в канторовской теории множеств не имеет смысла: принцип аналогии позволяет платонисту рассматривать множество натуральных чисел или, например, десятичное разложение числа π так, как если бы они были развернуты перед ним неким всезнающим обозревателем (**оракулом**), который может ответить на все осмысленные вопросы посредством простого просмотра всех членов бесконечной совокупности.

Однако слишком широкое понимание возможности построений приводит к тому, что даже явные определения некоторых объектов, не вызывающие сомнений, приводят к противоречиям. Приведем пример такого построения (по схеме парадокса Ришара)[34].

Возьмем в качестве исходного объекта число 1 и в качестве допустимых способов действия – операции прибавления единицы и умножения на 2, причем число шагов применения операций ограничим некоторым наперед заданным числом ***n*** (например, 4). Числа, которые могут быть построены таким образом, составляют некоторое конечное подмножество натуральных чисел; например, для случая не более чем четырехкратного применения допустимых операций это будут числа:

1 исходный объект,
2 $=1+1=1\times2$,
3 $=1+1+1= 1\times2+1$,
4 $=1+1+1+1=1\times2+1+1=1\times2\times2=(1+1)\times2$,
5 $=2\times2+1+1+1=1\times2\times2+1=(1+1)\times2+1$,

аналогично: 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16.

Обозначим через ***B*** **наименьшее из всех натуральных чисел, которые не могут быть получены таким путем** (для случая, когда число шагов построения не ограничено, здесь можно было бы добавить: **а если такое не существует, то примем *B* = 0**). Очевидно, такое ***B*** всегда существует (для случая с неограниченным числом шагов его существование обосновано принятием абстракции актуальной бесконечности). Для нашего случая ***B***=11. Включим теперь в число допустимых операций дополнительный принцип построения (***R***): **образование при некотором заданном числе *n* наименьшего числа из тех чисел, которые нельзя получить из 1 путем применения максимум *n* раз подряд допустимых действий, включая и сам принцип (*R*).**

Существует ли *наименьшее число* ***a****, которое нельзя построить применением максимум 4-х из указанных способов построения*?

Обозначим условие, выделенное курсивом, с помощью предикатора А**(m),** где **m** – индивидная переменная по натуральным числам.

Предположим (для ***n* = 4**), что такое ***a*** существует, т.е. примем посылку

[34] Вейль Г. О философии математики. – М.-Л.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1934. – С. 18-19.

(1) $\exists m A(m)$**,** где **A(m)** – условие, определяющее искомое число, **m** – переменная по натуральным числам. Тогда при построении этого числа в соответствии с абстракцией логической осуществимости принцип (**R**) применяется или не применяется.

(2) Предположим, что (**R**) применяется; тогда:

(2.1) по определению, ***a*** не может быть получено с помощью допустимых способов построения;

(2.2) по смыслу (**R**) ***a*** может быть построено с помощью принципа (**R**);

(2.1) и (2.2) дают противоречие; следовательно, истинно отрицание посылки (1), т.е. $\neg\exists m A(m)$**.**

(3) Если принцип (**R**) не применяется, то (по предыдущему) ***a*** = 11; однако, в этом случае применением принципа **(R)** число ***a*** может быть получено за 3 шага; сначала умножаем $1\times2\times2=4$, а потом применяем принцип (**R**) для ***n*** **= 4**; следовательно, имеем $\neg A(a)$**,** и, так как ***a*** – единственно, имеем $\forall m \neg A(m)$**,** откуда получаем истинность утверждения $\neg\exists m A(m)$**.**

Методом перебора случаев (с применением закона исключенного третьего) получаем:

(4) из $\exists\, m A(m)$ следует $\neg\exists m A(m)$.

Предположим теперь:

(5) $\neg\exists m A(m)$.

Это означает, что всякое натуральное число может быть построено с помощью не более чем 4-х применений наших принципов построения. Возьмем число ***a*** = 11. Это число не может быть построено без применения принципа (**R**). Если при построении ***a*** применяется принцип (**R**), то по смыслу (**R**) существует такое натуральное число, которое не может быть построено с помощью наших способов построения, т.е. $\exists m A(m)$**.**

Аналогично (4) получаем:

(6) из $\neg\exists\, m A(m)$ следует $\exists\, m A(m)$**.**

В классической логике всегда имеют место следования

(7) из $\exists m A(m)$ следует $\exists\, m A(m)$;

(8) из $\neg\exists m A(m)$ следует $\neg\exists m A(m)$**.**

Из (4) и (7) по закону умножения консеквентов получаем

(9) из $\exists m A(m)$ следует $\exists m A(m) \wedge \neg\exists m A(m)$; ($\wedge$ – знак конъюнкции).

Аналогично из (6) и (8):

(10) из $\neg\exists \mathbf{mA(m)}$ следует $\exists \mathbf{mA(m)} \wedge\neg\exists \mathbf{mA(m)}$.

По закону сложения антецедентов из (9) и (10) имеем

(11) из $\exists$ **mA(m)** $\vee$ $\neg\exists$**mA(m)** следует $\exists$**mA(m)**$\wedge\neg$ $\exists$**mA(m)**; ($\vee$ – знак неисключающей дизъюнкции).

Так как в классической логике имеет место закон исключенного третьего, то всегда истинно высказывание:

(12) $\exists$ **mA(m)** $\vee$ $\neg\exists$**mA(m)**;

из (11) и (12) по Modus ponens имеем:

(13) $\exists$ **mA(m)** $\wedge$ $\neg\exists$**mA(m),**

что является противоречием.

Таким образом, построение некоторого числа произведено средствами, допускаемыми канторовской теорией множеств; однако, ни доказательство существования этого числа, ни доказательство его несуществования не могут быть проведены методами классической логики. Следует отметить, что противоречие выводится из предположения о том, что вообще условие для ***a*** может быть определением некоторого числа. Но в чем порочность определений указанного вида? Канторовская теория множеств не содержит никаких указаний на этот счет.

Вместе с тем, в этой теории имеются и такие правила построения, принятие которых не ведет ни к каким антиномиям. Примером таких правил построения могут служить канторовские правила построения трансфинитных *порядковых чисел* (*ординалов*). В качестве исходного объекта принимается абстрактный объект-число единица, обозначаемое цифрой «1». Кантор принимает три принципа порождения[35].

Первый принцип порождения позволяет создать потенциально бесконечный ряд натуральных чисел на основании постулата о принципиальной возможности осуществления операции прибавления 1 (или операции «следующий за») к любому построенному ранее натуральному числу (абстракции потенциальной осуществимости).

Второй принцип порождения позволяет на основании потенциально бесконечного ряда конструируемых с помощью первого принципа порождения натуральных чисел **создать** новое число, которое определяется как первое большее всех их число. Второй принцип порождения существенно связан с широко

[35] Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. – С. 63–101.

применяющимся в математике методом **определения через абстракцию**[36]. Фактически число, порожденное по второму принципу, представляет собой абстрактный объект **более высокого порядка** по отношению к исходным числам натурального ряда, так как для построения такого числа требуется рассматривать потенциально бесконечный ряд натуральных чисел как единое целое, т.е. приходится существенно использовать абстракцию актуальной бесконечности. Для **унификации** порядка абстракции Кантор после применения второго принципа порождения переопределяет исходные натуральные числа, рассматривая их теперь как **порядковые (ординальные) числа конечных множеств,** а вводимые по второму принципу порождения числа – как **предельные ординальные числа актуально бесконечных множеств.**

Последовательное попеременное применение первого и второго принципов порождения позволяет Кантору строить потенциально бесконечную иерархию трансфинитных ординальных чисел.

Третий принцип порождения трансфинитных чисел – принцип стеснения или ограничения, – определяет условия, при котором могут применяться первые два принципа; он требует, чтобы к построению нового числа по первым двум принципам приступали только тогда, «когда совокупность всех предшествующих чисел обладает мощностью некоторого данного уже во всем своем объеме числового класса; для чисел второго числового класса это условие гласит, что множество чисел, предшествующих (в естественном порядке порождения) некоторому числу второго числового класса, должно обладать мощностью первого числового класса (т.е. быть кардинальным числом множества натуральных чисел)»[37]. Третий принцип порождения обеспечивает непрерывность иерархии трансфинитных чисел и ее потенциально бесконечное развертывание.

Можно показать, что совместное применение абстракций *абсолютной* осуществимости и *потенциальной* осуществимости для построения трансфинитных чисел не приводит к известным противоречиям[38]. *Множество всех кардинальных чисел*, с

---

[36] Яновская С. А. О так называемых «определениях через абстракцию» / С.А. Яновская. Методологические проблемы науки. – М.: Мысль, 1972. – 280 с.
[37] Там же, С. 63-101
[38] Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. – М.: Наука, 1967. – С. 42–48.

которым связан парадокс Кантора, и *множество всех ординальных чисел*, используемое при формулировке парадокса Бурали-Форти, не могут быть построены в соответствии с указанными принципами порождения (но могут быть **построены** с помощью других допустимых средств **наивной** теории множеств); абстракция актуальной бесконечности применяется здесь как бы **внутри** процесса построения иерархии трансфинитных чисел, которая сама по себе развертывается как потенциально бесконечная.

Вместе с тем, в канторовской теории множеств применяются методы введения объектов, которые удовлетворяют требованию непротиворечивости, но для которых нельзя указать какого-либо разумного генетического способа порождения этих объектов (например, применения **аксиомы выбора**).

Таким образом, среди объектов, вводимых определениями канторовской теории множеств, можно различать:

1) объекты, которые могут быть построены (введены) с помощью генетических методов, но доказательство существования, которых не может быть проведено, так же, как и доказательство их несуществования (пример в тексте);
2) объекты, которые не могут быть построены (в смысле генетического построения), но доказательство существования которых может быть дано (т.е. может быть показана непротиворечивость утверждения о существовании определяемого объекта);
3) объекты, которые могут быть генетически построены и для которых может быть приведено доказательство их существования;
4) объекты, которые не могут быть генетически построены и для которых не может быть приведено доказательство их существования.

Однако, в силу того обстоятельства, что в канторовской теории множеств допускаются абстракции актуальной бесконечности и абсолютной осуществимости без каких-либо ограничений на способы введения объектов, кроме требования непротиворечивости, а также в силу **наивного,** интуитивного характера понимания генетического **построения,** здесь не существует точных критериев различения определений 2-й и 3-й группы. Можно говорить о неконструктивности канторовской «наивной» теории множеств в двух смыслах:

1) в этой теории возможны построения объектов, доказательство существования которых не может быть проведено;
2) в **наивной** теории множеств нет четкого критерия для отличия конструируемых объектов и объектов, существование которых может быть доказано, но построение которых невозможно (так как нет достаточно четкого понимания, что такое генетическое построение, в силу чего нет средств для установления того, когда это построение невозможно).

Выделяя канторовское генетическое построение иерархии трансфинитных чисел среди других методов построения, допускаемых наивной теорией множеств, мы будем говорить о канторовской конструктивности. Гносеологические основания канторовской конструктивности[39] составляют следующие принципы.

(1) **Принцип абсолютной разрешимости вопроса о равенстве мощностей бесконечных множеств: идеализированный субъект,** предполагаемый наивной теорией множеств Г. Кантора, в состоянии всегда решить вопрос, равномощны или не равномощны друг другу бесконечные множества, методом установления взаимно-однозначного соответствия между ними.

(2) **Принцип потенциальной бесконечности** (1 принцип порождения): **идеализированный субъект** всегда в состоянии продолжить построение бесконечного множества.

(3) **Принцип актуальной бесконечности** (II принцип порождения): **идеализированный субъект** всегда в состоянии образовать новый объект из бесконечной совокупности построенных объектов.

(4) **Принцип ограничения (стеснения):** каждое применение абстракции актуальной бесконечности в процессе генетического построения должно происходить тогда, когда построены все объекты, объединяемые в новое

[39] Мануйлов В. Т. Две концепции обоснования математического знания//Философия. История. Культура. Часть 1. – Курск. пед. об-во, 1995. – С. 25-39.

множество (т.е. когда выяснена **возможность** такого построения).

Та часть **наивной** теории множеств, в которой допускаются лишь трансфинитные числа, является конструктивной относительно канторовского построения; но в силу **интуитивного,** неопределенного, неуточненного, *неформального* характера самой теории и понятия построения здесь не имеется средств для решения вопроса, является ли некоторая данная подтеория наивной теории множеств конструктивной относительно канторовского построения трансфинитных чисел. Другими словами говоря, канторовская конструктивность удовлетворяет требованиям **неформальной строгости,** но не удовлетворяет критериям формальной **строгости**[40].

Чтобы удовлетворить требования формальной строгости, необходимо провести полную аксиоматизацию и затем формализацию теорий, в которой рассматриваются генетические канторовские построения.

Отношения между интуитивной теорией и ее формальным двойником при этом зависят во многом от **принципов построения формальных теорий.** Для формальных теорий, по отношению к которым интуитивные теории рассматриваются как их стандартные модели, имеет смысл говорить о **гносеологических основаниях конструктивности языка теории** и **гносеологических основаниях конструктивности стандартной модели** (уточненной, возможно, средствами языка второго или больших порядков).

Одним из наиболее весомых аргументов противников канторовской теории множеств является указание на недоступность для человеческой интуиции абстракции актуальной бесконечности, в полной мере используемой Г. Кантором при построении теории трансфинитных чисел. Однако, в последнее время в ряде публикаций ставится под сомнение недоступность для человеческой интуиции понятия актуально бесконечного множества. Особенно знаменательным является то обстоятельство, что необходимость введения актуально бесконечных множеств в теорию научного знания обосновывается в публикациях, рассматривающих проблему индукции, то есть

[40] Kreisel G. Informal rigour and completeness proofs // Problems in the philosophy of mathematics / Ed. by Lakatos I. Amst.: North – Holl. Publ. Co., 1967. – P. 138-186.

проблему, традиционно являющуюся приоритетной в теории эмпирического знания. Говоря языком Г. Кантора, его теория трансфинитных чисел получает подтверждение не только со стороны чистой математики (то есть в области имманентной реальности), но и в области транзиентной реальности. Так, в статье Д. Кинга «Индукция и канторовский второй принцип порождения»[41] аргументированно обосновывается тезис о том, что «проблема индукции может быть решена только посредством принятия во внимание соображений, относящихся к канторовскому второму принципу порождения»[42]. Более того, Д. Кинг показывает, что философские аргументы в пользу канторовской теории трансфинитных чисел содержатся в общефилософских работах Уайтхеда, инициированных проблемой обоснования индуктивного знания в науке.

Таким образом, канторовская теория трансфинитных чисел, основанная на применении трех принципов порождения, действительно может рассматриваться как конструктивная часть канторовской наивной теории множеств, получившая многочисленные применения как в области чистой математики, так и в ее приложениях к эмпирическим наукам.

---

[41] King D. Induction and Cantor’s second principle generation// Philosophy today. – Celina, 2000. – Vol. 44, № 3. – P. 318-325.
[42] Ibid., P. 318.

Мороз В.В.
(Курск)

ФИЛОСОФСКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ В ФИЛОСОФИИ ХХ *

Резюме

В статье рассматривается идея философско-математического синтеза в контексте основных тенденций в философии математики ХХ века; проводится сравнительный анализ главных направлений в основаниях математики, сформировавшихся в результате очередного кризиса математических основ, выявляются типы взаимосвязи философии и математики в этих направлениях и раскрывается следующий тезис: с позиции идеи философско-математического синтеза аналитическая и конструктивная философия математики могут рассматриваться не как исключающие друг друга, а как взаимосвязанные и взаимодополняющие тенденции в современной духовной культуре.

Современная ситуация в духовной культуре по отношению к математическому знанию характеризуется распадом единого поля теоретизирования на три относительно самостоятельные, хотя и тесно взаимосвязанные между собой области:
1) собственно математика; 2) философия математики и 3) собственно философия[1]. Основные «жители» первой области – теории, рассматриваемые как интерпретированные или неинтерпретированные (формальные) исчисления, строящиеся в формальных языках и проверяемые на выполнение определенных критериев (непротиворечивости, полноты, независимости аксиом и так далее). Во второй области происходит своеобразная философская интерпретация математических теорий и их философское обоснование. В третьей же строятся философские системы. Существует и промежуточная область – основания математики, которая в зависимости от установки работающего в ней исследователя относится к одной из двух первых.[2]

---

* Работа выполнена при поддержке РФФИ. Проект № 02-06-06048.

[1] См. Мануйлов В.Т. Аналитическая и конструктивная философия математики//Наука и философия на рубеже тысячелетий: перспективы и горизонты. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. - Курск, 1995. -С.57.

[2] См. Мануйлов В.Т. Концепции в философии математики и гуманитаризация математического знания// Человекознание: гуманистические и гуманитарные ориентации в образовании. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. - Курск, 1994. -С.131.

Существуют разные точки зрения на кризис оснований математики. Например, группа французских математиков Н. Бурбаки считает, что кризиса вообще не существует. По их мнению, не стоит волноваться по поводу противоречий: они возникали в прошлом и их всегда удавалось разрешить: «Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки. Это дает им право смотреть в будущее спокойно»[3]. Однако большинство исследователей считают, что кризис основ имеет место, и ищут пути выхода из него. К таковым относятся представители рассматриваемых нами направлений.

Кризис в основаниях математики – это ситуация, когда ставятся такие задачи, которые не могут быть решены средствами и методами, считавшимися законными на данном этапе развития математики. Невозможность решения этих задач обнаруживается в форме парадоксов[4] (то есть применение вроде бы надежных методов приводит к недоразумению). Все три кризиса основ математики связаны с категориями дискретного и непрерывного (альтернативных, взаимоисключающих по характеру категорий математического мышления).

Двадцатое столетие – не первый период, в течение которого математика испытывала кризис основ. Впервые это произошло в V веке до н. э. в результате открытия несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны. Парадокс заключался в следующем: оказалось, что не существует такого числа (имеется в виду рационального), которым можно было бы охарактеризовать отношение диагонали квадрата и его стороны. То есть рациональные числа не заполняют всю числовую ось и существуют такие отрезки, длина которых не может быть выражена никаким рациональным числом. Возникает арифметико-геометрический конфликт, логическая сторона которого выражена в известных апориях Зенона.

Выход из первого кризиса был найден и состоял в запрете Аристотеля на применение актуальной бесконечности. Впоследствии были изобретены теория пропорций (содержащаяся в 5-й и 10-й книгах Евклида) и метод исчерпывания (который

---

[3] Бурбаки Н. Элементы математики. Пер. с франц. Под ред. Д.А. Райкова. С предисл. П.С. Александрова. Ч.1. Основные структуры анализа. Кн.1. Теория множеств. Гл. 1 - 4. - М.: Мир, 1965. – С.30.

[4] Слово “парадокс” греческого происхождения (παρα–δοξος), обозначает то, что противоречит мнению (δοξα).

изобрели Архимед и Евдокс) – зачаточная форма теории пределов, широко применявшаяся в средние века в арабской математике.

Второй кризис возник в конце XVII – начале XVIII веков и был связан с попытками обосновать исчисление бесконечно малых (связанное с именами Ньютона и Лейбница, которые попытались преодолеть запрет на актуальную бесконечность). Об этом парадоксе хорошо писал Дж. Беркли в своем сочинении «Аналитик, или рассуждение, адресованное неверующему математику...»: «Что такое эти флюксии *[термин, которым Ньютон называл мгновенные скорости приращений – В.М.]*? Скорости исчезающе малых приращений. А что такое эти исчезающе малые приращения? Они не есть ни конечные величины, … но и не нули. Разве мы не имеем права называть их призраками исчезнувших величин?»[5].

Рассмотрение дифференциалов как актуально бесконечно малых величин приводило к противоречиям (такая величина меньше любой наперед заданной величины и в то же время не есть ноль). Стремясь преодолеть этот кризис, О. Коши (в 30-е годы XIX века) показал, как безответственное употребление бесконечно малых может быть заменено корректным использованием пределов, а К. Вейерштрасс и другие (в 60-х – 70-х года XIX века) продемонстрировали возможность полной «арифметизации» анализа и теории функций.[6] Это упрочение математических основ было настолько успешным, что А. Пуанкаре в 1900 году на Втором международном математическом конгрессе заявил, что «теперь в математике остаются только целые числа и конечные или бесконечные системы целых чисел... Математика ... полностью арифметизирована... Мы можем сказать сегодня, что достигнута абсолютная строгость»[7].

Третий кризис в основаниях математики связан с развитием теории множеств, разработанной Георгом Кантором между 1874 и 1897 годами. После работ Кантора математиками владело убеждение, что «грандиозное здание анализа приобретает

---

[5] Беркли Д. Сочинения/[Сост., общ. ред. и вступ. статья И.С. Нарского] - М.: Мысль, 1978. – С. 425-426.

[6]См. Agazzi E. The rise of the foundation research in mathematics//Synthese.-Dordrecht, 1974.- Vol.27, № 1-2.- P.17-18.

[7] Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. А.С. Есенина-Вольпина. - М.: Мир, 1966.- С. 27.

несокрушимую крепость, оказываясь прочно заложенным и строго обоснованным во всех своих частях»[8]. Однако вскоре выяснилось, что новый фундамент математики - теория множеств – весьма далека от абсолютной надежности. Возникновение парадоксов (а к ним относятся логические антиномии Рассела, Кантора, Бурали-Форти, семантические антиномии Ришара, Греллинга, семантическая антиномия «лжец») было связано с перенесением свойств конечных множеств на бесконечные. Впервые это показал еще Б. Больцано (1781-1848), когда вывел свойство: бесконечное множество равномощно своему собственному бесконечному подмножеству, – таким образом продемонстрировав, что бесконечные множества обладают свойствами, противоположными свойствам конечных множеств.[9]

Но не столько возникновение антиномий в основаниях теории множеств само по себе, сколько тот факт, что различные попытки преодолеть эти антиномии выявили далеко идущие и неожиданные расхождения мнений и точек зрения по поводу самых основных математических понятий (начиная уже с понятия множества и числа), вынуждает говорить о третьем кризисе основ, который математика переживает и до сих пор. По этому поводу уместно привести высказывание одного из выдающихся мыслителей XX века Г. Вейля: «Мы меньше, чем когда-либо, уверены в первичных основах (логики и) математики. Как все и вся в мире сегодня, мы переживаем «кризис» ... На первый взгляд, он не мешает нашей ежедневной работе; однако я могу признаться, что на самом деле он оказал сильное влияние на мою математическую деятельность: он направлял мои интересы в область, казавшуюся мне относительно «безопасной», и постоянно подрывал во мне энтузиазм и решимость, необходимые для всякой исследовательской работы»[10].

Безуспешные попытки разрешить парадоксы постепенно укрепили убеждение в необходимости переосмысления ряда принципиальных идей математики и отказа от некоторых старых концепций. Прежде всего, парадоксы поставили математиков

---

[8] Вейль Г. О философии математики. Сборник работ. Пер. с нем. А.П. Юшкевича. Предисл. С.А. Яновской. - М. - Л.: Гостехиздат, 1934. – С. 16.

[9]Об этом см. в кн.: Колядко В.И. Бернард Больцано. – М.: Мысль, 1982.

[10] Weyl G. Mathematics and Logic. A brief survey as preface to a review of "The philosophy of Bertrand Russell"//Am. Math. Monthly. – Publ. by the Ass. Manasha, Wis. and Chicago, ill., 1946. – Vol.43. – n 1. – P. 13.

«перед проблемой перестройки теории множеств на совершенно измененной основе»[11]. Более того, возникла необходимость тщательного анализа логики рассуждения, ибо «... логика в том интуитивном виде, какой она имела в конце прошлого столетия, не годится в качестве четкого критерия строгости математического доказательства»[12]. Возникают различные направления обоснования математики. Вскоре определились три ведущие программы: ***логицизм***, связанный с именами Готлоба Фреге (1848-1920) и Бертрана Рассела (1872-1970), ***формализм***, персонифицированный Давидом Гильбертом (1862-1943), и ***интуиционизм***, теоретиком которого выступил Лейтзен Эгберт Ян Брауэр (1881-1966).

Основной тезис логицистов сводился к утверждению, что математика может быть полностью выведена из логики. В начале XX века большинство математиков видели в законах логики незыблемые, вечные истины. А если математика может быть выведена из логики, то она также является истиной. В свое время Готфрид Лейбниц, к которому восходит эта мысль, не осуществил такую программу, как не осуществили ее в течение последующих почти двухсот лет все те, кто высказывал аналогичные убеждения. Так, Рихард Дедекинд утверждал, что число невыводимо из интуитивных представлений о пространстве и времени, а является «непосредственной эманацией законов чистого разума»[13]. Наоборот, из числа мы выводим точные понятия пространства и времени. Но подкрепить свои утверждения конкретной программой Дедекинду не удалось.

За осуществление основного тезиса логицизма принялся находившийся под влиянием идей Дедекинда Готлоб Фреге. Он считал, что все математические законы суть аналитические суждения. А такие суждения утверждают не более того, что неявно заложено в принципах логики. Математические теоремы позволяют выявить это неявное. Не вся математика применима к реальному миру, но вся она заведомо состоит из необходимых истин. В своей работе «Основные законы арифметики» (1893-

---

[11] Клини С. Введение в метаматематику/ Пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина; Под. ред. В.А. Успенского. – М.: ИЯ, 1957. – С. 42.

[12] Карри Х.Б. Основания математической логики. Пер. с англ. В.Ф. Донченко. Под ред. Ю.А Гастева. - М.: Мир, 1969. – С. 26.

[13] Дедекинд Р. Что такое числа и для чего они служат? Пер. с нем. прив-доц. Н. Парфентьева. - Казань, типо-лит. Имп. ун-та, 1905. – С. 12.

1903) Фреге приступил к выводу из логических посылок арифметических понятий, определений и правил, из которых он впоследствии хотел вывести алгебру, математический анализ и геометрию. Однако в своих выводах он использовал понятие множества всех множеств, приводящее к парадоксам и поэтому недопустимое в основаниях. Таким образом, программа Фреге потерпела фиаско.

Независимо от Фреге Бертран Рассел наметил ту же программу выхода из кризиса, но идущую в несколько другом направлении. В «Принципах математики» (1903) он прямо говорит о том, что математика есть не что иное, как символическая логика. В своей программе Рассел предложил разветвленную теорию типов. В аксиоматической теории множеств исходные формулы имеют вид $x\in \mathbf{y}$. Рассел запрещает формулы такого вида. Каждой индивидуальной переменной соответствует определенный тип. Предложение правильно построено, если тип элемента, стоящего слева, меньше типа элемента, стоящего справа. Например, выражение $\mathbf{\forall x \Lambda \forall y (x \in y)}$ в обозначениях Рассела выглядит так: $\mathbf{\forall x^1 \Lambda \forall y^2 (x^1 \in y^2)}$. Что касается истинности математики, то Рассел был убежден, что «все утверждения, относительно всего реально существующего, например пространства, в котором мы живем, относятся к экспериментальной науке, а не к математике; утверждения, относящиеся к прикладной математике, возникают в тех случаях, когда в утверждениях, относящихся к чистой математике, одно или несколько переменных полагают равными некоторым константам»[14]. Он всегда верил, что какие-то основополагающие физические истины содержатся в математике, выводимой из логики.

Идеи, в общих чертах намеченные Расселом в «Принципах математики», были подробно развиты им совместно с Альфредом Нортом Уайтхедом (1861 - 1947) в трехтомном труде ***Principia Mathematica*** (1910-1913). Чтобы исключить непредикативные образования объектов внутри одного типа, вводится отношение порядка: если некоторый объект, представленный переменной $\mathbf{x^1}$ определяется посредством некоторой совокупности объектов, представляемой переменными $\mathbf{y^1, z^1, u^1, v^1}$, то каждой переменной,

[14] Russell B. The principles of mathematics. – 2d ed. – London, Allen and Unwin, 1937. – P. 17.

представляющей элементы совокупности, приписывается порядок, на единицу меньший порядка переменной, определяющей объект. Рассел и Уайтхед в своей математике восстанавливают ступени абстракции (классы становятся предметными переменными). Таким образом, теория типов, аксиоматическая система, построенная в логике предикатов первого порядка с равенством, служит для представления всей математики. В системе Рассела-Уайтхеда удалось исключить все известные парадоксы и получить все теоремы классического анализа в системе Рассела–Уайтхеда.

Однако в своем построении авторы ***Principia Mathematica*** использовали искусственный прием, введя аксиому сводимости. Она гласит: «Если мы вводим какой-нибудь объект с помощью непредикативного определения, опирающегося на совокупность объектов меньшего порядка, то на уровне порядка определяемого объекта существуют аналоги (изоморфные системы) исходного уровня.»[15] Рассел и Уайтхед строили свою систему, чтобы обосновать основной тезис логицизма, но вывести математику из аксиом, имеющих чисто логический характер, не удалось, так как оказалось невозможным построить систему без аксиомы бесконечности, которая не является чисто логической.

Следующая фундаментальная аксиома в системе Рассела-Уайтхеда – аксиома выбора – также вызывает сомнения относительно ее чисто логической природы в случае бесконечных множеств (аксиома выбора: если имеется какое-то множество, то всегда можно образовать множество его единичных подмножеств).[16]

Итак, аксиомы сводимости, бесконечности и выбора показывают несостоятельность теории логицизма. К тому же логицистская программа не дала ответа на вопрос, каким образом в математику могут входить новые идеи и как математика может описывать реальный мир, если ее содержание целиком выводимо из логики.

Тем не менее многие выдающиеся математики и логики, например Уиллард Ван Орман Куайн и Алонсо Черч, по-прежнему выступают в защиту логицизма, хотя в современном состоянии

[15] Об аксиоме сводимости см., например, Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. - М.: Мир, 1966. – С. 188-189.

[16] Подробнее об аксиоме выбора см. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. - М.: Мир, 1966.- С. 65 и сл.

относятся к нему критически. У логической программы имеются убежденные сторонники, стремящиеся ликвидировать причины возражений и сделать менее громоздкими ее построения. Другие ученые склонны видеть в логицизме несбыточную мечту. Находятся и такие, которые выступают с резкой критикой логицизма, считая его абсолютно ложной концепцией математики. Однако своим фундаментальным трудом Рассел и Уайтхед способствовали прогрессу математической мысли, осуществив всю аксиоматизацию в чисто символическом виде, тем самым значительно продвинув развитие математической логики. По-видимому, последнее слово о логицизме было сказано самим Расселом в его книге «Портреты по памяти»: «Я жаждал определенности примерно так же, как иные жаждут обрести религиозную веру ...и через каких-нибудь 20 лет напряженных усилий и поисков я пришел к выводу, что не могу сделать ничего более, дабы придать математическому знанию неоспоримый характер»[17]. «Восхитительная определенность, которую я всегда надеялся найти в математике», – продолжал он свою мысль в работе «Мое философское развитие», – «затерялась в путанице понятий и выводов... Это оказался поистине запутанный лабиринт, выхода из которого не было видно»[18].

Итак, взаимосвязь философии и математики в логицизме реализуется в его основной цели – сведении математики к логике. Так как логика всегда считалась частью философии, то, на первый взгляд, представляется картина максимального сближения математики с философией. Однако логика Фреге и Рассела, «очищенная» от «психологизма», перестает быть философской и превращается в формальную («пустую», по Канту), и математические символы лишаются всяких смыслов и превращаются в значки. Сама же математика теряет содержательную сторону, и поиск истины сводится к доказательству непротиворечивости математических объектов и систем. Основания математики есть область формальной логики.

Параллельно с развитием логицизма, группа математиков, называвших себя интуиционистами, предложила совершенно иной подход к математике. Представители этого направления пытались обосновать истинность математики, ссылаясь

[17] Russell B. Portraits from the memory and other essays. - London, Allen and Unwin, 1956. – P. 21.
[18] Russell B. My philosophical development. - 3d ed. - London: Univ. Books, 1975. – P. 27.

непосредственно на человеческий разум. Однако выводы из логических принципов интуиционисты считали менее надежными, чем непосредственно интуитивные соображения.

Интуиционизм в широком смысле слова восходит к Рене Декарту и Блезу Паскалю, многие положения этого направления были предвосхищены Иммануилом Кантом. Непосредственным же предшественником современного интуиционизма считается Леопольд Кронекер. Он отвергал бесконечные множества и трансфинитные числа, так как считал возможным иметь дело лишь с потенциальной бесконечностью. С его точки зрения, все, что делал Кантор в этой области, было не математикой, а мистикой. Карл Эрнст Бэри его последователи Эмиль Борель и Анри Лебег, чьи возражения относились к аксиоме выбора, считаются «полуинтуиционистами». Родоначальником собственно интуиционизма справедливо считается Лейтзен Эгберт Ян Брауэр. Его позиция в математике проистекает из его философских взглядов. Математика, считает Брауэр, – это человеческая деятельность, которая начинается и протекает в разуме человека. Вне человеческого разума она не существует, следовательно, она не зависит от реального мира. Разум непосредственно постигает основные, ясные и понятные, интуитивные представления. Они являются не чувственными или эмпирическими, а непосредственно данными, достоверными представлениями о некоторых математических понятиях. Парадоксы, с точки зрения Брауэра, – это симптомы болезни, и те методы, которые предлагают логицисты, не излечивают ее, потому что они не устраняют главный источник – насилие над интуицией. Понятие множества настолько неясно и неотчетливо, что построить на его основании хорошую математику невозможно. Единственное основание – натуральный ряд чисел как потенциальная бесконечная совокупность.

Фундаментальное интуитивное представление – постижение различных событий в хронологической последовательности. Математика возникает тогда, когда сущность двойки, возникающая вследствие хода времени, абстрагируется от всего частного. Остающаяся пустая форма общего содержания всех двоек становится исходным интуитивным представлением математики и, повторяемая неограниченно, создает новые математические сущности. Математическое мышление, по Брауэру, представляет собой процесс мысленного построения, создающего свой собственный мир, не зависящий от опыта и ограниченный лишь тем, что в основе его должна лежать фундаментальная математическая интуиция, которую следует представлять себе не как нечто сходное по природе с неопределяемыми понятиями, встречающимися в аксиоматических теориях. Наоборот, через него должны постигаться разумом все неопределяемые идеи, используемые в различных математических системах, если они действительно призваны служить математическому мышлению. Кроме того, математика по своей природе синтетична. Она занимается составлением истин, а не выводит их из логики.

Каждое математическое утверждение должно иметь реальный смысл. Оно говорит о каких-то процессах построения во времени. И образцом такого построения является интуиция натурального числа. Помимо этого, Брауэр считал интуитивно ясными сложение, умножение и математическую индукцию. Критерием осмысленности суждения является возможность его построения. Законы логики, применяемые в математике, должны быть соотнесены с конструктивностью. Чистые доказательства существования считались бессмысленными и потому недопустимыми. Таким образом, одна из основных теорем анализа, теорема Больцано – Вейерштрасса,[19] оказывается «вне закона». Брауэр обнаруживает неконструктивность, отсутствие интуитивного содержания большинства теорем классического анализа.

В тридцатые годы XX века Брауэр переходит от критики к положительной программе. Он пытается построить интуитивную теорию континуума, используя понятие последовательности свободного выбора. Все последовательности Брауэр делит на два класса: ***lowlike*** (последовательности, становящиеся по какому-то закону или законам) и ***lowless (***так называемые «беззаконные» последовательности, которые, в свою очередь, делятся на относительные и абсолютные). Континуум есть среда свободного становления, или поток последовательностей, а свободно становящаяся последовательность – конкретный путь в этом

[1] Формулировка теоремы Больцано - Вейерштрасса: «Каждая ограниченная числовая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность». Теорема справедлива как для действительных, так и для комплексных чисел. (См. Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энц-я, 1977. – Т.1. – С. 517). С точки зрения интуиционизма, доказательство этой теоремы не отвечает принципу конструктивности.

потоке. В своих последних работах Брауэр построил интуиционистскую версию классического анализа, в которой доказываются основные теоремы.

В интуиционистской концепции обоснования математического знания прослеживается стремление к принципу: «Математика сама себе философия». Однако, в отличие от логицизма, математика здесь рассматривается как область конструктивной деятельности человеческого разума, как теория творящего субъекта, ей придается философский характер. Математические знаки суть символы, наполненные содержанием, а доказательство – не исчисление, а убеждение другого математика (субъекта) в истинности теоремы.

Третье направление в основаниях математики – формализм – сформировал и возглавил Давид Гильберт. По его мнению, путь обоснования математики, предложенный интуиционизмом, является ложным. Брауэр требует, чтобы каждое математическое утверждение имело реальный смысл (конструктивное содержание). По Гильберту, в математике это невозможно. В 20-е годы XX века Эрнст Мах сформулировал тезис наблюдаемости: любое утверждение физики должно быть утверждением об опытно проверяемых фактах. В контексте физических теорий могут встречаться термины ненаблюдаемых величин (например, энергия). Но Мах требует, чтобы всегда существовал некоторый способ элиминирования ненаблюдаемых терминов. Наличие способа элиминирования составляет требование наблюдаемости. Есть две версии этого принципа: 1) сильная (которой придерживается сам Мах): должен существовать единственный способ элиминирования ненаблюдаемых терминов из всех контекстов физики; 2) слабая: для каждого конкретного контекста должен быть свой метод элиминирования ненаблюдаемых терминов (этой версии относительно математики придерживался Гильберт).

Основатель формализма предложил разбить математические утверждения на реальные (которые представляют собой конструкции) и идеальные (от них нельзя требовать интуитивного смысла, но они важны в самой теории). Когда утверждения составляют теорию, у них появляются логические связи. Поэтому не нужно требовать, чтобы все теоремы анализа имели конструктивный смысл. Важно только наличие метода устранения этих идеальных утверждений из состава теории. Использование неконструктивных методов в математике безвредно. Метод доказательства элиминируемости есть гильбертовское доказательство непротиворечивости. Математик не должен прослеживать все стадии образования понятий. Идеальные элементы помогают нам строить теории в целом. Для доказательства элиминируемости требуется доказательство непротиворечивости. Отсюда выстраивается гильбертовская программа обоснования математики, которая состоит в следующем. Во-первых, вся математика аксиоматизируется, во-вторых, содержательная аксиоматическая теория формализуется, т.е. превращается в чистую работу с символами. Эта формализованная математика рассматривается в некоторой содержательной теории (метаматематике), которая ограничивается финитными методами, то есть методами, не выходящими за рамки содержательной арифметики, и методом математической индукции. Если нам удастся доказать в этой метаматематике синтаксическую непротиворечивость формальной системы, то обоснование математики закончено, то есть мы доказали элиминирование всех идеальных утверждений. Таким образом удалось доказать непротиворечивость многих теорий (например, логики высказываний, логики предикатов первого порядка с равенством). Однако в конце 30-х годов XX века Курт Гедель доказал свою знаменитую теорему о том, что не может быть доказана непротиворечивость формальной теории методами, погруженными в саму эту теорию. Следовательно, доказательство непротиворечивости арифметики невозможно финитными методами. Но в 1936 году представителю гильбертовской школы Герхарду Генцену (1909-1945) удалось ослабить запреты на методы доказательства, допустимые в метаматематике Гильберта, и он смог доказать непротиворечивость арифметики и отдельных разделов математического анализа, используя метод трансфинитной индукции[20]. Как и следовало ожидать, формалистская программа

---

[20]Трансфинитная индукция – принцип, позволяющий утверждать суждение **A(x)** для любого элемента **x** вполне упорядоченного класса **E**, если установлено, что для всякого $\mathbf{z \in E}$ из истинности **A(y)** для всех $\mathbf{y<z}$ следует истинность **A(x)**: $\mathbf{\forall z(\forall y<z \to A(y) \to A(z)) \to \forall x A(x)}$ (См. Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энц-я, 1977. – Т.5. – С. 451).

вызвала критику со стороны соперничающих направлений за то, что оно лишала связь понятия числа с реальным миром всякого смысла. Критика Брауэра заставила многих осознать неправильность казавшегося ранее бесспорным мнения о том, что математические теории правильно отражают некое заложенное в них реальное содержание. Разумеется, создатели математических теорий мыслили их как идеализации реальных вещей и явлений. Но впоследствии, особенно в XX веке, многие понятия математического анализа утратили какую бы то ни было интуитивную подоплеку, и в глазах интуиционистов они выглядели логически неудовлетворительными. Однако принять взгляды Брауэра означало отвергнуть значительную часть классической математики на том основании, что она лишена интуитивного смысла. Современные интуиционисты заявляют, что формализованная математика бессодержательна, даже если бы Гильберту и удалось доказать ее непротиворечивость. Вейль сетовал на то, что Гильберт «спас» классическую математику «ценой коренного пересмотра ее содержания», формализовав и выхолостив ее и «тем самым в принципе превратив из системы с интуитивно воспринимаемыми результатами в игру с формулами по определенным, раз и навсегда установленным правилам...»[21]. В свою очередь, Гильберт обвинил Брауэра и Вейля в том, что те пытаются выбросить за борт все им не подходящее и наложить диктаторские запреты на многие плодотворные области науки. Тем не менее Вейль считал, что в метаматематике Гильберт, по существу, ограничил свои принципы интуиционистскими.

Понимание взаимосвязи философии и математики в формализме близко, по сути, логицистскому. Математика здесь представляется как формализованная дедуктивная система, а основания математики – метаматематика, представляющая собой математическую дисциплину, в минимальной степени нагруженную философскими понятиями.

Обзор основных направлений обоснования математического знания позволяет сформулировать общий принцип всех трех течений: «Обоснование математики – дело рук самих математиков».

---

[21] Цит. по Клайн М. Математика. Утрата определенности/Пер. с англ. Ю.Я. Данилова; Под. ред. д-ра физ-мат наук, проф. И.М. Яглома. – М.: Мир, 1984. – С. 292.

Итак, к 30-м годам XX века сложились три различных подхода к математике. Никто не мог утверждать, что такая-то и такая-то теорема доказана правильно: непременно следовало прояснить, каким стандартам (логицистским, формалистским или интуиционистским) удовлетворяет данное доказательство. Та самая наука, которая в начале XIX века, несмотря на все зигзаги логического развития, была провозглашена совершеннейшей из наук, та самая наука, в которой теоремы доказывались с помощью неопровержимых безупречных рассуждений, наука, утверждения которой считались истинами об окружающем нас мире, а в глазах некоторых оставались истинами в любом из всевозможных миров, не только отказалась от всяческих притязаний на истину, но и запятнала себя конфликтами между различными школами в основаниях и взаимоисключающими утверждениями о правильных принципах логики.

Ныне математика достигла той стадии развития, когда вопрос о том, что, собственно, надлежит называть математикой – логицизм, интуиционизм или формализм, – вызывает споры. Каждое течение в основаниях математики обладает тонкой структурой: разделяется на отдельные русла, состоящие, в свою очередь, из множества потоков. Так, интуиционисты не сходятся между собой во мнениях относительно того, что следует считать фундаментальными, интуитивно воспринимаемыми понятиями: только целые или и некоторые рациональные числа, закон исключенного третьего, распространяемый только на конечные или и на счетные множества. По-разному трактуются конструктивные методы. Логицисты полагаются только на логику, но и они не избавлены от сомнений по поводу аксиом сводимости, выбора и бесконечности. Даже формалисты могут выбирать путь по своему усмотрению. Выбор принципов математики для доказательства непротиворечивости не вполне однозначен. Финитных принципов, отстаиваемых Гильбертом, оказалось недостаточно для доказательства непротиворечивости формальных математических систем. После того, как Гедель показал, что в рамках наложенных Гильбертом ограничений любая достаточно мощная формальная система содержит неразрешимые утверждения, пришлось принять таковые в качестве дополнительных аксиом. Однако и после этого, согласно теореме Геделя, расширенная система должна содержать неразрешимые утверждения. Таким образом, процесс последовательного расширения исходной формальной системы можно продолжать бесконечно.

На рубеже третьего тысячелетия многообразие различных подходов к обоснованию математического знания достаточно четко укладывается в границы двух фундаментальных концепций: аналитической и конструктивной философии науки. Как одна, так и другая концепция берет в качестве исходного пункта анализа математическое знание; характерным для обоих направлений является ориентация на истолкование проблем философии науки как проблем философии языка. Однако аналитическая и конструктивная философия науки предполагают в принципе различные образы науки, а также пути, методы построения и обоснования научного знания.

Под аналитической философией науки обычно понимают традицию XX века, представленную прежде всего тремя наиболее значительными стадиями развития: эмпиризм («Венский кружок» – Карнап, Штегмюллер), рационализм (Поппер, Лакатос), историзм (Кун, Фейерабенд). Историко-философским истоком и ориентиром для этой концепции служит философия Лейбница. Здесь принимаются тезисы об аналитичности математики, о редуцируемости математического знания к логике, о научной философии как анализе языка точными формальными средствами. Адекватным выражением аналитической версии обоснования математики является программа Гильберта. Формализм и логицизм тяготеют к аналитической концепции взаимосвязи философии и математики, а, следовательно, к идеям Лейбница.

Конструктивная философия науки (konstruktive Wissenschaftstheorie) оформляется лишь в 70-80-х годах нашего столетия, прежде всего в работах представителей «Эрлангенской школы» или «немецкого конструктивизма» (основатели: Лоренцен, Камла), однако она видит свои давние истоки в немецкой классической философии (не случайно Канта называют «дедушкой немецкого конструктивизма»). К предшественникам этого направления также относят Маркса, Дильтея, Гуссерля, Хайдеггера и т.д. – то есть тех мыслителей XIX - XX вв., которые акцентировали внимание на человеческой практике, формах субъективной деятельности при анализе философских проблем науки. Кантовский «трансцендентальный» метод, диалектический метод Гегеля, диалектико-материалистический метод Маркса, феноменологический метод Гуссерля, современная философская герменевтика образуют ту «среду обитания», в которой формируется «немецкий конструктивизм». «Отцом» этого течения в философии считается оригинальный мыслитель Гуго Динглер, занимавшийся специально основаниями точных наук. Интуиционистское понимание связи философии и математики сближается с позицией конструктивной философии математики, и, через нее, с Кантом.

Итак, Кант и Лейбниц определили все дальнейшее противостояние в вопросах взаимосвязи философии и математики. Идея философско-математического синтеза П.А. Флоренского позволяет увидеть пути преодоления этого противостояния. Признавая кантовское учение об антиномиях человеческого разума, о. Павел приходит к выводу об антиномичности отношений между математикой и философией и их диалектическом единстве. С другой стороны, для Флоренского математические законы есть законы бытия, а математические категории суть необходимые и первые предпосылки мировоззрения. Это сближает русского философа с Лейбницем. Философия наполняет математику жизненным содержанием, математика же структурирует философское мышление. Таким образом, аналитическая и конструктивная философия математики могут рассматриваться не как исключающие друг друга, а как взаимосвязанные и взаимодополняющие тенденции в современной духовной культуре.

Более того, опасения, вызванные расщеплением математики на различные, остро конфликтующие между собой направления, могут быть устранены, если посмотреть на математику через призму идеи «цельного мировоззрения». Такой взгляд позволяет увидеть целостность самой математики, которая как раз и заключается в совокупности существующих направлений. Несовместимость различных концепций снимается на уровне «цельного мировоззрения». Истина становится доступной не какому-то одному «правильному» направлению, а всем направлениям в целом.

Петров Ю.А.

(Москва)

РОЛЬ ФИЛОСОФИИ В ОБОСНОВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Резюме

Рассматривается роль философии в обосновании математического знания. Вводятся понятия гносеологического и семиотического обоснования математики. Проводится различие между качественными и количественными отношениями в объективной реальности. Различаются содержательные и формальные математические теории. Определяются непосредственный и опосредованный предметы содержательной математической теории. Рассматриваются программы теоретико-множественного, логицистского, формалистского, интуиционистского и конструктивистского обоснования математики, выясняются их цели, границы; намечаются пути построения диалектической концепции обоснования математики.

Для обоснования математики философия имеет двоякое значение. Во-первых, она необходима как средство гносеологического обоснования математики. Во-вторых, она служит фундаментом семиотического обоснования математики.

Значение философии для гносеологического обоснования математики.

Гносеологическое обоснование математики понимается как демонстрация существования в объективной действительности тех предметов, свойств и отношений, которые отображает математика. История науки и история философии показывают, что в различные периоды развития естествознания и философии проблема гносеологического обоснования естественных наук имела различную степень трудности. Например, естественно-исторический материализм 17-19 веков считал, что физика отображает объективную (т.е. материальную) действительность и тем самым имеет философское обоснование. Однако метафизическое понимание категории материи (материального) как вещества (т.е. того, что обладает свойством непроницаемости, массы покоя и т.п. свойствами) делало это обоснование весьма неустойчивым. Действительно, открытие делимости атома показало, что в основе мироздания лежат, как тогда считали, электроны, отнюдь не обладающие свойством вещественности. Это и послужило поводом для утверждения об «исчезновения материи». Последнее означало, что физика не отображает объективную действительность, что ее законы – просто конвенции. Тем самым с точки зрения метафизического естественно-исторического материализма физика потеряла свое гносеологическое (т.е. философское) обоснование на рубеже 19-20 веков. Приведенный пример показывает, что проблема философского обоснования физики в одни периоды имела положительное решение, а в другие периоды приходила к кризису. В начале 20 века кризис в философском обосновании физики называли «кризисом в физике», хотя из контекста всегда можно усмотреть, где речь шла о кризисе в первом смысле, а где – во втором смысле.

В философском обосновании математики дело обстояло гораздо сложнее, чем в философском обосновании физики. В домарксовой философии даже материалисты практически не могли удовлетворительно решить проблемы философского обоснования математики. Поэтому-то в философии математики почти всецело господствовал идеализм. И это не случайно. Трудность философского (и именно гносеологического) обоснования математики обусловливалось трудностью обнаружения в объективной действительности того специфического, что является предметом математики. Обнаружить предмет математики в объективной действительности не мог не только идеализм, но и метафизический материализм. Это было возможно сделать лишь с позиции диалектического материализма. Обоснуем это утверждение более подробно.

Прежде всего выясним, что является предметом математики в объективной действительности. Это особые отношения. Об их природе Энгельс писал: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное…»[1]. Из сказанного следует, что отношения действительного мира, изучаемые математикой, можно выделить лишь силой абстракции, отделив их от содержания, т.е. отвлекшись от содержания. Но если это можно сделать, то ясно, что рассматриваемые отношения не зависят от содержания, а значит имеют место между объектами любого содержания, или, как говорят, «любой природы».

Конечно, в действительном мире любые отношения существуют между объектами, имеющими какое-то определенное содержание. Но одни из них зависят от качественной специфики содержания, и поэтому их нельзя «отделить» от содержания. Назовем такие отношения качественными отношениями. Например, отношение дружбы является качественным отношением. Как в этом убедиться? Надо проверить, зависит оно или не зависит от качественной специфики тех объектов (предметов, свойств и отношений), между которыми имеет место. Ясно, что оно имеет место не между объектами любого содержания, а лишь между людьми. Значит зависит от специфики содержания объектов и потому не может быть отделено от содержания.

Но допустим, что мы отношение дружбы все-таки отделили от содержания. Тогда должно быть верно утверждение «для объектов любой области действительного мира и любого содержания верно, что один объект дружит (или не дружит) с другим». Однако можно тут же привести пример объектов неживой природы, относительно которых наше утверждение неверно. Стало быть отношение дружбы является качественным отношением.

Можно рассмотреть и более широкие отношения, например, электромагнитные. Эти отношения имеют место только между электрически заряженными телами, но не между любыми материальными объектами. Поэтому они зависят от качественной специфики объектов и относятся к качественным отношениям.

В объективной действительности существуют такие отношения, которые не зависят от качественной специфики (или от содержания) объектов, между которыми они имеют место. Такие отношения получили название количественных

[1] К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч., 2-е издание, т.20, с.37.

о т н о ш е н и й действительности (т.е. «действительного мира»). Примерами простейших количественных отношений являются отношения типа отношений «равно», «больше», «меньше». Они имеют место между объектами любой природы (любой качественной специфики). Нетрудно убедиться, что отношения типа равенства имеют место в живой и неживой природе, в обществе и в познании. Поэтому они не зависят от природы (от содержания) объектов, между которыми имеют место. Стало быть отношение типа равенства (но не какое-либо конкретное отношение равенства) является количественным отношением. К ним же относятся отношения типа отношений «больше», «меньше» и т.п.

Для дальнейшего изложения очень важно понимать различие между конкретным отношением и отношением того типа отношений, к которому принадлежит это конкретное отношение. Конкретные отношения всегда зависят от природы объектов, между которыми имеют место: например, отношение ю р и д и ч е с к о г о р а в е н с т в а имеет место только между людьми, а стало быть, зависит от того, что это люди, не что-нибудь иное, т.е. это отношение зависит от природы объектов, между которыми имеет место. Отношение р а в е н с т в а п о в е с у зависит от того, что тела, между которыми оно имеет место, имеют массу. Ясно, что эти отношения являются качественными отношениями.

Отношение же типа равенства есть то общее, что присуще всем конкретным отношениям равенства. Этим общим является то, что все отношения равенства обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, а также другими свойствами, логически следующими из первых трех. Поэтому отношение типа равенства есть просто рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение, не зависимое от того, между объектами какого содержания оно имеет место и в каких конкретных отношениях равенства оно проявляется. Отношение типа равенства (в отличие от конкретных отношений равенства) «совершенно отделено от содержания», оставляет это последнее в стороне как нечто безразличное и абстрактное. В противоположность равенству материальных объектов оно эмпирически не проверяемо и не воспроизводимо. Это же можно сказать и об отношениях типа отношений «больше», «меньше» и т.п. Другими словами, количественные отношения эмпирически не даны. Их можно выделить в объективном мире только силой абстракции. Поэтому-то Ф. Энгельс и говорит о них как о «чрезвычайно абстрактных» отношениях.

Возникает весьма трудная задача: как выделить в объективной действительности количественные отношения, т.е. как в ней «увидеть» отношения, не зависимые (совершенно отделенные) от содержания? Эта задача равносильна вопросу: что позволяется сказать об объектах, находящихся в определенных отношениях, чтобы можно было выделить в «чистом» виде количественные отношения. Ясно, что для этого нельзя опираться на содержание (нельзя учитывать содержание) объектов. Для этого можно использовать язык, не содержащий никаких дескриптивных (описывающих какие-либо конкретные свойства) терминов. Например, такой язык:

x, y, z …– переменные для предметов, неизвестно каких именно. Тут мы совершенно абстрагируемся от содержания обозначаемых этими переменными предметов. Такие переменные называются предметными (или индивидуальными) переменными.

P, Q, R … – предикаты. Это такие символы (или формулы), которые могут выражать свойства или отношения в отвлечении от того, какого они содержания, т.е. в абстрагировании от этого содержания.

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ … – логические связки, соответственно обозначающие логическую операцию отрицания («неверно, что…») и логические связки: конъюнкцию («…и…»), дизъюнкцию («…или…») и импликацию («если …, то …»). Эти связки применяются к суждениям об объектах произвольного содержания, а значит не зависят от этого содержания.

Построенный язык удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к выделению количественных отношений путем их описания, не опирающегося на содержание объектов, между которыми эти отношения имеют место. А как это делается практически, поясним на простых примерах.

Допустим, нам надо выделить в «чистом» виде отношение типа равенства. Тогда опишем это отношение на только что построенном языке. На этом языке нам надо сказать, что отношение типа равенства есть некоторое отношение R, обладающее свойствами (1) рефлексивности, (2) симметричности и (3) транзитивности. На нашем языке это запишется следующими формулами:

(1) $R\ (x, x)$. Формула означает, что произвольный объект x имеет отношение R с самим собой (свойство рефлексивности отношения R).
(2) $R\ (x,\ y) \supset R\ (y,\ x)$. Формула означает, что, если x имеет отношение R с y, то y имеет отношения R с x (свойство симметричности отношения R).
(3) $R\ (x, y) \wedge R\ (y, z) \supset R\ (x, z)$. Эта формула выражает транзитивность отношения R, смысл которой весьма ясен.

В итоге мы выразили (определили) отношение типа равенства, не опираясь ни на какие свойства содержания объектов, между которыми это отношение имеет место. На вышеописанном нами языке можно выразить и многие другие количественные отношения, однако далеко не все. Более богатым является язык общей теории множеств.

Теория множеств изучает отношения множеств. При этом теория совершенно отвлекается от содержательной специфики множеств, что и делает ее пригодной для выражения количественных отношений. Тут читатель может задать вопрос, а где же свойства множеств и операции над множествами? Не упустили ли мы их, говоря, что общая теория множеств изучает отношения множеств? Нет, не упустили. Дело в том, что **свойство** определяется как **унарное отношение**, **предмет** – как **0-арное отношение**, ***n*-арная операция** – как **(*n*+1)-арное отношение**. Язык теории множеств достаточно мощный, чтобы на нем можно было выражать очень многие количественные отношения, например, числовые.

На языке теории множеств можно выразить понятия натурального числа, рационального, действительного числа, трансфинитного числа и т.п., а также отношения между числами, в частности, операции сложения, умножения разного рода чисел и т.п. Уже отсюда следует, что числовые отношения являются частным случаем количественных отношений. **Числовые отношения** – это отношения математических величин, которые «совершенно отделены от их содержания». Например, число 5 – это не **физические величины** «5 килограмм» или «5 километров» и т.п. Это **математическая величина** «5», отделенная от содержания, выражаемого килограммами, километрами и т.п.

На языке теории множеств можно выразить и геометрические отношения. Это следует из того, что в аксиомах геометрии термины «точка», «линия», «плоскость» не имеют никакого конкретного содержания. Это просто объекты трех родов, удовлетворяющие этим аксиомам. Как говорил Д. Гильберт, если вместо терминов «точка», «линия», «плоскость» взять термины «стол», «стул» и «пивная кружка», то от этого ничего не изменится. Поэтому геометрические отношения (т.е. отношения объектов, о которых говорит геометрия) инцидентности, порядка, конгруэнтности, непрерывности и параллельности являются тоже примером количественных отношений.

Для описания количественных отношений действительности употребляются и другие математические языки, например, языки функционального анализа, общей алгебры, теории графов и т.п. Все они, хотя и содержат дескриптивные термины, наподобие терминов «функция», «число», «линия», «алгоритм» и т.п., но, как говорил Ф. Энгельс, совершенно отделяют их от конкретного содержания, оставляя последнее в стороне как нечто безразличное.

Вот это-то и затушевывает, по словам Ф. Энгельса, их происхождение из внешнего мира, затрудняет понимание того, что в конечном итоге изучаемые математикой отношения являются количественными отношениями действительности. При этом, разумеется, нельзя думать, что за каждым термином математики и за каждым отношением математических объектов можно усматривать объект действительности. В настоящее время это столь тривиально, что нет смысла данное положение сколько-нибудь подробно разъяснять. Отношение математики к действительности в домарксистской философии практически даже материалистами понималось на априористской идеалистической основе. Причиной этого заявления, с одной стороны, была специфика предмета математики, с другой стороны, – специфика количественных отношений действительности, а, с третьей стороны, – само понимание категории материального. Дело в том, что чистая (или теоретическая) математика (в отличие от прикладной математики) представляет собой либо содержательные теории, либо формальные теории.

Содержательные математические теории своим непосредственным предметом имеют системы абстрактных идеализированных объектов «совершенно отделенных от содержания действительного мира». Последнее, как выше было сказано, необходимо для отображения количественных отношений действительности. Читателю может показаться парадоксальным то, что содержательная математическая теория отделена от содержания. Но ничего парадоксального здесь нет, если учесть, что в первом случае имеется в виду непосредственное содержание теории, или ее **непосредственный предмет**, которым является некоторая система математических объектов (т.е. множество математических объектов с отношениями между ними). Такими системами могут быть числовые системы, системы геометрических объектов (точек, линий, плоскостей с геометрическими отношениями между ними) и т.п. системы. Во втором случае под содержанием понимается опосредованное содержание теории, ее **опосредованный предмет**, или предмет в объективной действительности. Построение систем математических объектов непосредственно может и не зависеть от предмета математики в объективной действительности, т.е. от объектов действительности. Далеко не всякие математические объекты могут быть прямо соотнесены с объектами действительного мира. Однако, лишь в конечном счете построение систем математических объектов, которые описывает математическая теория, предназначено для отображения количественных отношений (или **формы**) систем объектов действительного мира. Иначе говоря, содержательная математическая теория имеет непосредственное содержание, относительно которого она и оценивается как истинная. Это содержание представляет собой систему математических объектов, отделенных от содержания действительного мира. И это потому, что опосредованным содержанием математической теории (системой математических объектов) являются количественные отношения систем объектов действительного мира.

Исторически дело обстояло так, что идеализм видел только непосредственный предмет математики и отказывался видеть ее опосредованный предмет. Этому способствовало то обстоятельство, что этот предмет, т.е. количественные отношения действительного мира, представляют собой «чрезвычайно абстрактную форму», эмпирически непосредственно не воспринимаемую и выделяемую в действительном мире только силой абстрактного мышления. Правда, в принципе это характерно не только для математики, но и для всей науки. Например, нельзя чувственно воспринять «плод вообще», не только индивидуальные плоды. «Плод вообще» (общее понятие о плоде) есть то общее, что имеют все индивидуальные плоды. Но все же это гораздо менее абстрактный объект, чем, допустим, отношение типа равенства или геометрические отношения вообще. Непосредственный предмет математики действительно создается мышлением человека. Как говорил Ф. Энгельс, «математика – наука, занимающаяся умственными построениями…»[2]. Теории содержательной математики действительно формулируют свои законы относительно непосредственного предмета. Идеализм на этом и останавливается. Вот тогда и получается идеалистическая концепция соотношения математики и действительности. Суть ее в том, что математика не отражает объективную действительность, априорна и т.д.

Домарксовский материализм, конечно, пытался дать гносеологическое обоснование математики, от которого фактически уходил идеализм. Однако правильно решить эту проблему мешало само метафизическое понимание категории материального. Материальное понималось даже естественно-научным материализмом 17-19 веков как вещественное. Однако количественные отношения действительности, так же, как и производственные отношения, частицы, поля и т.п., – это отнюдь не вещественное. Отсюда и проистекали для метафизического материализма кризисы в философском обосновании математики и естествознания, в том числе и в их гносеологическом обосновании. Хорошо известен кризис в гносеологическом обосновании физики, рассмотренный В. И. Лениным в работе «Материализм и эмпириокритицизм». Но подобный же кризис существовал на протяжении веков и в гносеологическом обосновании математики. Разрешение этих кризисов стало возможным лишь на базе диалектико-материалистической философии. Уже из вышесказанного ясно, что как для разрешения кризиса в гносеологическом обосновании физики, так и для разрешения кризиса в гносеологическом обосновании математики необходимо было дать диалектико-материалистическое понимание категории **материального** (как существующего вне и независимо от сознания, или существующего не только в сознании). Последнее и давало возможность увидеть в количественных отношениях действительного мира материальные отношения, а тем самым дать обоснование тому положению, что математика отображает

[2] К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч., 2-е издание, т.20, с.172

объективную (материальную) действительность. Однако отображает чрезвычайно общие ее отношения. До того общие, что они не зависят («совершенно отделены») от содержания объектов действительности, между которыми имеют место. Тут дело обстоит так же, как и в разрешении кризиса гносеологического обоснования физики, истории общества, и т.п. Одним из проявлений такого рода кризиса в физике было так называемое «исчезновение материи», когда электроны считались нематериальными, а физика тем самым считалась не отображающей материальную действительность. Этот кризис мог быть разрешен только на базе диалектико-материалистического понимания категории материи.

Из вышесказанного следует, что кризис в философском, в частности, гносеологическом обосновании математики мог быть разрешен только на основе диалектико-материалистического понимания категории материального. Ясно, также, что ни метафизический материализм, ни, тем более, идеализм этого кризиса разрешить не могли уже в силу самих основ этих направлений в философии.

Формальные математические теории (например, формальная арифметика, формализованные теории множеств, теории общей алгебры и т.п.) непосредственного предмета вообще не имеют. Они, конечно, могут быть интерпретированы на системах математических объектов и превратиться таким образом в содержательные математические теории. Но это уже иной вопрос. Нам сейчас важно одно: отображают ли формальные теории количественные отношения действительности, либо могут ли они их отображать?

Так как формальные теории (исчисления) не имеют интерпретации, то они, разумеется, ничего непосредственно не отображают. Однако формальное исчисление только тогда принимается в качестве теории, когда обязательно получит хотя и не гносеологическое, но **семиотическое обоснование**. Последнее выражается в доказательстве логической непротиворечивости исчисления. А сам критерий логической непротиворечивости выбран так, чтобы теория (хотя бы в возможности) была пригодна для отображения действительности. Поэтому формальные теории математики, удовлетворяющие семиотическому критерию непротиворечивости, имеют и гносеологическое обоснование в том смысле, что они в возможности (потенциально) могут отображать количественные отношения действительного мира несмотря на то, что в данное время может быть и не известно, какие это отношения.

Проблема семиотического обоснования имеет значение и для содержательных математических теорий. Это как бы критерий их научной состоятельности. Дело в том, что только семиотически обоснованная теория может иметь надежное гносеологическое обоснование. Конечно, последнее обстоятельство далеко не всегда явно осознавалось. На первый взгляд дело обстояло даже так, что поиски критериев семиотического обоснования математики велись ради самого этого обоснования. И только тщательный философский анализ программ семиотического обоснования математики может вскрыть его гносеологическую подоплеку. Поэтому для философии математики анализ семиотического обоснования математики важен не столько сам по себе, сколько в аспекте его связи с гносеологическим обоснованием математики. На этом вопросе мы специально и остановимся.

Значение философии для семиотического обоснования математики.

Прежде всего условимся, что для краткости речи будем именовать семиотическое обоснование математики просто **обоснованием математики**, как это зачастую и делается, если это не повлечет двусмысленности. Во-вторых, заметим, что общее понимание семиотического обоснования как доказательства логической непротиворечивости теории имеет различные смыслы в разных программах обоснования математики. Поэтому проблему обоснования математики целесообразно рассматривать применительно к определенным программам этого обоснования, что мы и будем делать. Какие положения будут нами установлены в результате рассмотрения различных программ обоснования математики? Основные из этих положений следующие.

(1) Фундаментальной причиной кризисов различных программ семиотического обоснования математики являлось явное или неявное использование для этой цели метафизической гносеологии.

(2) Преодоление кризисов в обосновании математики возможно лишь на базе диалектической гносеологии.

(3) Диалектическая гносеология обеспечивает правильный подход к выбору критериев обоснованности и методов обоснования математики.

Рассмотрение правомерности этих тезисов проведем на основе анализа исторически существовавших программ обоснования математики, первой из которых была программа теоретико-множественного обоснования.

Программа теоретико-множественного обоснования математики.

Программа теоретико-множественного обоснования математики ставила целью обоснование «обычной», т.е. **содержательной классической математики**. **Содержательной** эта математика является потому, что ее теории имеют математическое содержание, т.е. интерпретированы на некоторого рода системах математических объектов (числовых, геометрических и т.п.). **Классической** эта математика называется потому, что основана на предпосылках, традиционно принимаемых математикой и ставших уже, так сказать, «классическими» в этом смысле. К подобным предпосылкам относятся следующие.

(1) В качестве математических объектов могут приниматься абстрактные идеализированные объекты «произвольной природы». Поясним, что это означает. Напомним, что **математический объект**, как говорил Ф. Энгельс, есть продукт «умственного построения». Он служит для отображения действительности, но не является объектом материальной действительности. «Строится» этот объект, во-первых, путем задания (с помощью определения) свойства, которым он должен обладать. Определения могут быть любые: через род и видовое отличие, индуктивные, через абстракцию, остенсивные или вербальные, явные или контекстуальные, эффективные и неэффективные и т.д. и т.п. Однако определения должны быть **несамопротиворечивы:** из них не должны выводиться суждения вместе с их отрицаниями, т.е. они не должны приводить к противоречиям в тех теориях, в которых используются. Естественно, что определения должны удовлетворять всем требованиям логики, предъявляемым к определениям (в частности, не должны содержать порочного логического круга).

Например, нельзя дать определение актуально бесконечному множеству как множеству, построенному в результате завершения бесконечного процесса построения. Так, нельзя понимать множество натуральных чисел 0, 1, 2, …, n, … как завершение процесса построения натуральных чисел 0, 1, 2, …, n, … . Такого рода определение самопротиворечиво, ибо из него следует противоречие, а именно: как суждение «Бесконечный процесс никогда не может быть завершен», так и суждение «Бесконечный процесс может быть завершен». Еще один пример. Аксиомы формальной теории, как известно, являются неявными определениями. Так вот, аксиома о параллельных Лобачевского несамопротиворечива. Но ее присоединение к аксиомам геометрии Евклида приведет к противоречию, ибо там имеется несовместная с ней аксиома о параллельных Евклида.

Во-вторых, математический объект «строится» (задается, определяется, вводится) в предположении его существования в рамках абстракции осуществимости, принимаемой данной теорией. В классической математике принимаются две основные абстракции осуществимости: абстракция потенциальной осуществимости и абстракция актуальной осуществимости (актуальной – т.е. логической, «абсолютной»).

Потенциальная осуществимость – абстрактная осуществимость объекта, предполагающая возможность построения объекта в отвлечении от его **материальной осуществимости** (физической, биологической, экономической, технической и т.п.) при наличии эффективного способа построения каждого шага построения. Принятие абстракции потенциальной осуществимости позволяет считать осуществимыми (построенными) объекты, представляющие собой как результаты завершения конечных процессов построения, так и потенциально бесконечные процессы построения, называемые **потенциальной бесконечностью**. Примером последнего рода процессов является натуральный ряд 0, 1, 2, …, n, … . Так как нет эффективного способа построения множества натуральных чисел (равно как и всякого другого актуально бесконечного множества), то это множество (как и всякое другое актуально бесконечное множество) не является осуществимым в рамках абстракции (принципа) потенциальной осуществимости.

Актуальная осуществимость – абстрактная осуществимость объекта, предполагающая его построение с помощью несамопротиворечивого и не приводящего к противоречию в данной теории определения. Актуальная осуществимость – более сильное понятие об осуществимости, чем потенциальная осуществимость, так как позволяет считать осуществимым объект не только материально неосуществимый, но и не осуществимый даже потенциально. Например, множество потенциальных чисел не осуществимо потенциально, но осуществимо актуально, ибо задается несамопротиворечивым определением. Вообще, в рамках принципа актуальной осуществимости осуществимо **актуально бесконечное множество**, являющееся множеством, содержащим правильное (не совпадающее со всем множеством) подмножество, эквивалентное всему множеству (т.е. элементы этих множеств приводимы во взаимно-однозначное соответствие). Последнее определение несамопротиворечиво. Остается только проверить, не приводят ли к противоречиям более специфические свойства конкретных бесконечных множеств.

Объекты «произвольной природы», принимаемые классической математикой, не такие уж произвольные. Их построение подчиняется всем вышеупомянутым требованиям построения математических объектов, но они могут строиться в рамках как абстракции потенциальной осуществимости, так и в рамках абстракции актуальной осуществимости.

(2) **Истинность математических суждений** в классической математике понимается как «классическая» (или традиционная) истинность. Последнее означает, что можно применять как эффективные (например, алгоритмические), так и неэффективные методы установления истинности суждений классической математики. **Эффективный метод** связан с некоторыми точными и четкими предписаниями, а **неэффективный метод** с такими предписаниями не связан. Например, истинность суждения арифметики «$12\cdot2 = 24$» проверяется эффективно с помощью алгоритма, заданного таблицей и правилами умножения. Но если мы установили истинность суждения с помощью правила доказательства от противного, то можем еще не иметь никакого эффективного метода установления его истинности. В этом случае истинность суждения устанавливается неэффективно.

(3) Классическая математика в качестве логики своих теорий принимает классическую логику. **Классическая логика** математики достаточно полно описывается классической логикой

предикатов, суть которой излагается во всех учебниках по математической логике. Для дальнейшего изложения важно будет отметить одну характерную особенность классической логики. Она состоит в том, что по законам и правилам этой логики из классически истинных суждений получаются (выводятся) опять-таки классически истинные суждения. К классической логике относится закон исключенного третьего, правило доказательства от противного и т.п. Важно отметить, что в классической математике закон исключенного третьего применяется к актуально бесконечным множествам (применять этот закон к потенциально бесконечным последовательностям не имеет смысла).

Когда речь идет о теоретико-множественном обосновании математики, то имеется в виду **канторовская** («наивная») **общая теория множеств**, предметом которой являются множества вообще, а не какие-нибудь конкретные множества. **Семиотическое обоснование** – это синтаксическое, семантическое, либо прагматическое обоснование. **Семантическое обоснование** состоит в демонстрации семантической истинности (ложности) суждений или непротиворечивости теорий. Так как семантическое обоснование является частным случаем семиотического обоснования, то в дальнейшем для общности мы будем говорить о семиотическом обосновании, хотя в данном разделе (посвященном теоретико-множественному обоснованию) под ним будет всегда пониматься его частный случай – семантическое обоснование. Заметим, что семантическое обоснование, вообще говоря, не предполагает непременно гносеологическое обоснование математики. Это происходит потому, что речь идет об истинности или ложности математических суждений. А это вопрос соотношения суждения с системами математических объектов (образно говоря, – с «математической абстрактной реальностью»), а не с системами объектов материального мира. Гносеология же изучает именно отношение теории к объективной действительности, а не к «системам математических объектов».

Метод обоснования мыслится как метод так называемого **теоретико-множественного сведения** всех математических теорий к теории множеств. Этот метод действует следующим образом.

(а) Математические абстракции (понятия) любой математической теории сводятся к теоретико-множественным понятиям, т.е. определяются через понятия теории множеств. Оказывается, что язык теории множеств настолько мощный, что дает возможность выполнить эту задачу, хотя порой она бывает не из легких. Желающим подробнее ознакомиться с тем, как эти определения производятся, рекомендуем обратиться к статье У. В. Куайна, опубликованной в сборнике «Математика в современном мире»[3]. Например, понятие арифметики «натуральное число» можно определить через понятия теории множеств «мощность множества» и «конечное множество» следующим образом: натуральное число есть мощность конечного множества. Сложение натуральных чисел определяется через объединение непересекающихся множеств. Конечно, через теоретико-множественные понятия определяются исходные понятия любой математической теории. А производные понятия определяются через исходные.

(б) В результате вышеописанного сведения все предложения любой математической теории сведутся к предложениям теории множеств, т.е. станут предложениями этой теории.

(в) Тогда, если теория множеств семантически обоснована (семантически непротиворечива), т.е. доказано отсутствие в ней наряду с истинными ложных предложений, то и вся математика обоснована тоже. В свое время математики (например, Э. Шредер) интуитивно полагали, что это именно так.

Однако такому мнению был нанесен жестокий удар открытием в самой теории множеств семантического противоречия (т.е. наличия истинного и ложного предложений одновременно). Это противоречие было названо парадоксом Рассела. Теория множеств оказалась семантически необоснованной ввиду того, что парадокс Рассела логически следовал из основных принципов теории множеств. Чтобы показать правомерность этого утверждения, необходимо сформулировать те принципы, из которых следует парадокс Рассела, и в явном виде представить вывод этого парадокса. Принципов, необходимых и достаточных для вывода парадокса Рассела, три.

---

[3] У. В. Куайн. Основания математики // Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967. – 95–110.

1) **Принцип свертывания**. Этот принцип говорит о том, что каждому несамопротиворечиво заданному признаку соответствует непустое множество предметов, обладающих этим признаком.
2) **Принцип** допущения **объектов «произвольной природы»**. Этот принцип дает возможность рассматривать множество предметов тоже как предмет.
3) Принципы классической логики (т.е. ее законы и правила).

Теперь покажем, что из вышеперечисленных принципов следует парадокс Рассела.

(i) Зададим несамопротиворечивый признак «быть множеством всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента». Обозначим его буквой $\boldsymbol{P}$. Этот признак задан несамопротиворечиво, так как существуют примеры множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, ибо множество людей не является человеком. Если бы признак $\boldsymbol{P}$ был задан самопротиворечиво, то никакого примера объекта, удовлетворяющего этому признаку, привести было бы нельзя, ибо самопротиворечивому признаку соответствует пустое множество объектов. Однако мы пример привели, стало быть, признак $\boldsymbol{P}$ задан несамопротиворечиво.

(ii) Если признак $\boldsymbol{P}$ несамопротиворечив, то, согласно **принципу свертывания**, этому признаку соответствует множество всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента. Обозначим это множество буквой $\boldsymbol{M}$.

(iii) Согласно принципу 2), множество $\boldsymbol{M}$ можно представить как предмет $\boldsymbol{M}$.

(iv) В силу пункта (iii) в языке теории множеств тогда является осмысленным выражение $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$, где $\in$ есть знак принадлежности предмета множеству. Отсюда ясно, что без принципа 2), мы не имели бы права выражение $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$ считать осмысленным, т.е. считать его предложением языка теории множеств, и тогда не смогли бы сформулировать парадокс Рассела. Заметим, что мы установили лишь то, что выражение $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$ является предложением (т.е. либо истинным, либо ложным выражением), но не установили, какое из этих двух значений имеет место.

(v) Теперь предположим, что предложение $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$ истинно.

(vi) Если $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}$ истинно, то, согласно определению множества $\boldsymbol{M}$, оно принадлежит к классу множеств, которые не являются элементами самих себя. Тогда и множество $\boldsymbol{M}$, входя в этот класс, не есть множество, являющееся элементом самого себя, что можно записать предложением $\boldsymbol{M \notin M}$. Итак, из положения об истинности $\boldsymbol{M \in M}$ получено $\boldsymbol{M \notin M}$.

(vii) Из $\boldsymbol{M \in M}$ также следует по правилам логики $\boldsymbol{M \in M}$. Но тогда из $\boldsymbol{M \in M}$ содержательно следует $\boldsymbol{M \notin M}$, а формально – $\boldsymbol{M \in M}$, т.е. противоречие.

(viii) Если из $\boldsymbol{M \in M}$ следует противоречие, то по правилу логики «Если из $\boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{B}$ и ***не-В,*** то доказано ***не-А***», доказано ***не***-($\boldsymbol{M \in M}$), т.е. $\boldsymbol{M \notin M}$. Таким образом из предположения истинности $\boldsymbol{M \in M}$ мы уже без всяких предположений доказали истинность $\boldsymbol{M \notin M}$.

(ix) Если $\boldsymbol{M \notin M}$ истинно, то на основании содержательного понимания множества $\boldsymbol{M}$ (т.е. на основании задающего это множество признака $\boldsymbol{P}$) мы можем сказать, что, если $\boldsymbol{M}$ не принадлежит к множеству тех множеств, которые не являются элементами самих себя, то оно принадлежит к его дополнению, т.е. к множеству тех множеств, которые являются элементами самих себя. А последнее записывается выражением $\boldsymbol{M \in M}$. Тем самым мы доказали $\boldsymbol{M \in M}$.

(x) Таким образом из пунктов (viii) и (ix) следует, что в теории множеств без всяких предположений, только из ее принципов 1), 2), 3) доказывается предложение «$\boldsymbol{M \in M}$ и $\boldsymbol{M \notin M}$», являющееся парадоксом Рассела, что и означает кризис в семиотическом обосновании теории множеств.

Из парадокса Рассела следуют как логические, так и гносеологические (и вообще философские) выводы. Логика говорит о том, что, если из каких-либо посылок (в частности, принципов 1)–3)) следует противоречие (в частности парадокс Рассела), то по меньшей мере одна из посылок (какой-то принцип) ложна. А ложный принцип надо из теории удалить. Но какой? И как? Может быть какой-либо из принципов 1)–3) вообще выбросить? Но что тогда останется от теории множеств? Можно показать, что тогда она потеряет многие и из своих весьма важных результатов.

И тут возникает уже диалектическое противоречие. Оно состоит в том, что для того, чтобы теория множеств была семиотически обоснована, надо, с одной стороны, удалить из нее логическое противоречие (парадокс Рассела, а возможно и еще не обнаруженные противоречия). Но, с другой стороны, надо сохранить основные положения теории множеств. Иначе она потеряет свое познавательное значение.

Оказалось, что избавиться от логического противоречия типа парадокса Рассела довольно просто. Мы уже говорили, что достаточно удалить принцип 2), как парадокс Рассела будет невозможно сформулировать. Это же достигается путем удаления принципа 1), или принципа 3). Но это, во-первых, не решает кризиса в семиотическом обосновании теории множеств. Дело здесь состоит в том, что удаление парадокса Рассела еще не доказывает отсутствия в теории множеств других противоречий. Последнее надо доказать. А как следует из известной теоремы о непротиворечивости К. Геделя (о которой мы еще будем говорить) доказать непротиворечивость теории множеств после удаления из нее парадокса Рассела путем перестройки этой теории, предложенной Расселом, в принципе невозможно.

Во-вторых, простое удаление каких-либо из принципов 1)–3) не разрешает упомянутого выше диалектического противоречия: ведь для математики нет смысла отказываться от научно-практических ценных результатов, хотя бы и во имя семиотического обоснования теории множеств. Однако подобное противоречие для содержательной математической теории еще не ведет к безысходным кризисным ситуациям. На помощь тут приходит практика. Она помогает, образно выражаясь, «блокировать» противоречия. Как это достигается? Достигается тем, что математика практически имеет дело с множествами (числовыми, точечными и т.п.), относительно которых парадокс Рассела сформулировать невозможно. Правда, это еще не гарантирует, что этот парадокс не проявляется как-нибудь неявно и весьма завуалировано. Поэтому метод «блокирования» логических противоречий не избавляет теорию от необходимости ее семиотического обоснования. В силу этого попытки перестроить теорию множеств так, чтобы она сама была семиотически обоснованной и на этой базе была обоснована вся математика, продолжались. Одна из таких попыток принадлежит Б. Расселу, о чем и пойдет речь ниже. Эта попытка получила название логицистского обоснования математики.

Программа логицистского обоснования математики.

Представителями логицистского направления в обосновании математики были, например, Б. Рассел и А. Уайтхед. Этимология слова «логицизм» показывает, что логицистская программа как-то связана с логикой. Однако на самом деле речь идет о логике в расселовском ее понимании как особой теории множеств, названной теорией типов. В определенном аспекте, конечно, имеется взаимосвязь между логикой и теорией множеств, но все же (как строго показал В. Куайн) нельзя теорию множеств даже в форме теории типов приравнивать к логике. Так что связь логицизма с логикой довольно условна. И, говоря о логицистском обосновании математики, все же лучше вместо слова «логика» употреблять термин «расселовская теория множеств», или «теория типов».

Расселовская теория множеств является такой перестройкой канторовской теории множеств, которая позволяет избежать в теории множеств парадокса Рассела. Это достигается за счет переформулировки принципа свертывания. В расселовской формулировке принцип свертывания содержит бóльшие ограничения, чем ограничения, накладываемые на задание множества в канторовской теории множеств. Эти дополнительные ограничения сводятся к тому, что множество может быть задано не всяким несамопротиворечивым признаком, а только лишь признаком, определяемым предикативно. Непредикативные определения вообще, по мнению Рассела, должны быть запрещены в математике.

Что это означает? Это означает, что при задании множества согласно принципу свертывания нельзя использовать **непредикативное определение**, т.е. определение термина (выражающего некоторый признак), которое содержало бы среди определяющих терминов сам определяемый термин. Например, непредикативным определением термина «человек» было бы определение, определяющее (дефиниенс) которого снова содержал бы этот же термин. Кажется, что в ограничении предикативными определениями и исключении непредикативных определений нет ничего плохого. Кажется, что так и должно быть. Ведь это ограничение исключает логический круг в определении. Исключать-то исключает, но какой ценой!

Здесь опять-таки мы встречаемся с диалектическим противоречием между необходимостью избавиться от нежелательных факторов познания и необходимостью сохранить ценные факторы познания. В рассматриваемом нами случае надо не только избавиться от нежелательных непредикативных определений, но и сохранить «безвредные» непредикативные определения, имеющие большое значение для математического познания. Вот последнее требование и нарушает запрещение пользоваться непредикативными определениями вообще (каковы бы они ни были).

Дело в том, что «логические круги» в определениях бывают разные. Одни можно назвать недопустимыми кругами (обычно их называют «порочными кругами»), а другие – допустимыми. Водораздел между этими «кругами» устанавливает принцип исключаемости вводимых в теорию абстракций. Этот принцип говорит о том, что если мы ввели в теорию некоторую абстракцию, то должны иметь возможность ее исключить, т.е. понизить уровень абстрагирования вплоть до нулевого, т.е. до индивидуальных объектов (предметов, свойств, отношений). Предикативное определение (если оно правильное) всегда исключает вводимую абстракцию посредством разъяснения ее смысла через другие абстракции, принимаемые за известные. Например, определение «Человек есть разумное животное» исключает абстракцию «человек», заменяя ее уже известными абстракциями «животное» и «разумное».

Теперь рассмотрим недопустимое непредикативное определение «человек есть животное, являющееся человеком». Термин «человек» здесь не исключается, потому что его надо заменить опять-таки термином «человек». Получается действительно «порочный круг»: чтобы знать, что такое человек, нам опять-таки надо знать, что такое человек. Однако имеются непредикативные определения и без «порочного круга», которые вполне допускаются математиками и ими широко используются. Например, к ним относится индуктивное определение. В этом определении несмотря на то, что в определяющем встречается определяемый термин, тем не менее мы можем его исключить, доводя вычисление согласно этому определению вплоть до индивидуального объекта (например, до конкретного числа). Это легко проверить, взяв индуктивные определения сложения, умножения и т.п.

Таким образом, перестройка принципа свертывания с помощью запрещения всяких непредикативных определений ради ликвидации в теории множеств парадокса Рассела стоила математике очень важных ее познавательных результатов. И это уже сразу сделало расселовскую попытку семиотического обоснования математики плохо приемлемой.

Но посмотрим, как же сказалось ограничение математики только предикативными определениями на перестройке теории множеств. Оно выразилось, прежде всего, в построении предмета этой теории, т.е. самих множеств. Исходными объектами построения согласно расселовской теории множеств являлись индивидуальные объекты. Они множеств не представляли. При этом, конечно, надо отличать индивидуальный объект от множества объектов, состоящее из одного индивидуума. Поэтому индивидуальные объекты были отнесены к нулевому типу в иерархии множеств. Далее идут множества 1-го типа, которые состоят только из индивидуальных объектов. Множество объектов 2-го типа могут состоять только из множеств 1-го типа и т.д. Таким образом, все множества распределяются по типам, а теория множеств становится теорией типов.

Ясно, что множества, являющиеся элементами самих себя (задаваемые непредикативными определениями), не входили ни в один из типов и из предмета изучения теории типов исключались. В теории типов, таким образом, не может даже быть сформулирован парадокс Рассела.

Целью логицистской программы семиотического обоснования математики являлось обоснование ее на базе теории типов. Однако, по многим причинам эта цель не была достигнута. В этом и состоит кризис логицистского обоснования математики. Можно показать, что причины этого кризиса были фундаментальными и не устранимыми в рамках предпосылок, на которых строилась теория типов. Основная из этих причин состоит в невозможности доказательства непротиворечивости теории типов. В литературе часто говорят о невозможности доказательства непротиворечивости теорий типа Principia Mathematica. Но это одно и то же, так как в работе Рассела и Уайтхеда под таким названием и изложена теория типов, которую называют по наименованию данной работы.

Чего на самом деле достигли Рассел и Уайтхед в смысле обоснования семантической непротиворечивости теории типов? – Только того, что в ней невозможно противоречие типа парадокса Рассела. А как насчет других возможных противоречий? Может быть теория типов все же противоречива? На этот вопрос Рассел и Уайтхед ответа не дали. Зато этой проблемой занялся К. Гёдель. И оказалось, что проблема непротиворечивости столь богатых языковыми средствами теорий, какой является теория типов, вообще не может быть доказана. Этот вопрос навсегда останется открытым. Стало быть, и кризис логицистского обоснования математики не может быть преодолен.

Для философии математики интересно еще одно обстоятельство, связанное с логицистским обоснованием математики. Рассел полагал, что теория типов позволяет не только дать семантическое (а стало быть и семиотическое обоснование математики), но и показать ее априорность, т.е. независимость семантической истинности принципов (аксиом) теории типов (а тем самым и всех математических теорий) от опыта (от практики, от эмпирических критериев истинности). Однако скоро было показано, что и эту концепцию Рассела ожидал кризис ввиду ее несостоятельности. Дело в том, что истинность математических суждений, называемая иногда **математической истинностью**, понимается как аналитическая истинность. Это обусловлено тем, что, как выше было сказано, математика формулирует свои законы относительно систем математических объектов, являющихся абстрактными и идеализированными, в природе не существующими. В природе (т.е. в объективном мире) могут существовать лишь аналоги математических объектов. Поэтому об истинности математических суждений нельзя судить на основании взаимосвязей материальных аналогов математических объектов.

Рассел это совершенно неоспоримое положение пытался представить как свидетельство априорности математики. Чтобы не вдаваться в подробности, поясним эту идею Рассела на несколько ином, но показывающем основную суть этой идеи, примере. Возьмем закон исключенного третьего ***P(x)*** $\vee$ ***не-P(x),*** где ***P*** – предикат, выражающий какое-то свойство, а ***x*** переменная, пробегающая множество каких-то объектов. Что это за свойство и какие это объекты, мы не знаем, но все же знаем, что закон исключенного третьего истинен. Рассел это обстоятельство понимал бы как истинность, не зависимую от опыта, т.е. априорную истинность. Вот примерно так он рассуждал об истинности в математике. В этом смысле должны быть истинны все фундаментальные принципы математики, которыми и мыслились принципы теории типов. Однако оказалось, что это не так. Например, аксиома бесконечности, говорящая о существовании бесконечного множества объектов, всегда на этот счет вызывала большие сомнения. Аналогично обстоит дело и с аксиомой сводимости непредикативных определений к предикативным.

Кроме того, та математика, которая была бы обоснованной с позиции логицистской программы, была бы уже не всей математикой, а ее частью, так как выпадала бы из математики ее непредикативная часть. И, более того, математика бы сильно усложнялась, например, уже в силу того, что каждый тип должен был бы иметь свой натуральный ряд.

В заключение важно отметить, что программа логицистского обоснования, так же как программа теоретико-множественного обоснования математики, не способна была дать обоснование именно всей математики. И обе эти программы пришли к кризису, показали неспособность выполнить стоящую перед ними задачу. Заметим, также, что обе программы пытались непосредственно обосновать содержательную математику, имеющую дело с системами математических объектов, в том числе и бесконечными множествами, математику, суждения которой об этих объектах должны были быть истинными. И когда эти суждения относились к бесконечным множествам, то их истинность характеризовалась как **нефинитная истинность**. Таким образом обе программы предполагали непосредственное обоснование нефинитной математической истинности. Последнее важно отметить потому, что в этом вопросе Д. Гильберт пошел по совершенно новому пути и выдвинул принципиально иную программу обоснования классической математики, обосновать которую оказалось невозможным с позиции теоретико-множественной и логицистской программ. Гильбертовская программа обоснования математики по причинам, которые дальше будут разъяснены, получила название программы формалистского обоснования математики.

Программа формалистского обоснования математики.

Гильберт считал, что обосновать математику **семантическим методом**, т.е. непосредственно опираясь на семантику классической математики, включающую объекты «произвольной природы», в том числе актуально бесконечные множества, совершенно невозможно. Например, уже потому, что неясно, как представить бесконечное множество и как устанавливать истинность суждений об этих множествах. Ведь перебрать все элементы такого множества и установить, обладают ли все они некоторым свойством, никаким эффективным методом невозможно. Поэтому Гильберт и исключал обоснование классической математики, непосредственно опирающееся на (или непосредственно анализирующее) ее же семантику.

Целью программы Гильберта оставалось семантическое обоснование классической содержательной математики, но не прямо, а косвенно – через синтаксическое обоснование формальной математики, отображающей логическую форму содержательной математики, с последующей интерпретацией формальной математики на системах объектов классической математики. Эту цель предполагалось достигнуть следующим методом.

(1) Формализовать классическую математику. Объектом формализации являются содержательные математические теории. Необходимо выявить в «чистом» виде, т.е. в отвлечении от ее содержания (т.е. семантики), форму каждой из этих теорий (являющуюся чисто синтаксическим построением).

Что представляет из себя **форма** некоторой содержательной **теории**? Интуитивно ее можно представить так. Допустим, нам дана содержательная теория. Она состоит из предложений, которых, как правило, неограниченно много. Каждое предложение имеет логическую форму (или просто форму). Но что такое **логическая форма предложения**? На этот вопрос не так-то просто ответить. И уж никакого эффективного определения на этот счет нам не известно. Более того, если написать предложение на обычном разговорном языке и поставить задачу выявить его логическую форму, то эту задачу можно решать по-разному в зависимости от того, для чего нужно выявлять эту форму. Для одних целей выявлять придется одну форму, а для других – другую. Поэтому вопрос, что такое форма предложения сама по себе, безотносительно к задачам, решаемым с помощью выделения этой формы, в «чистом виде», является некорректным вопросом. Но примеры выделения формы предложений, поясняющие суть дела, дать все же можно. Да они частично известны из курса математики.

Возьмем предложение, утверждающее присущность какого-то признака «***P***» некоторому предмету «***a***», например, предложение «лист дерева зелен». Формой этого предложения будет формулу ***P(a).*** Такая форма выделяется путем замены термина, обозначающего предмет, символом индивидной константы «***a***», а термина, обозначающего признак, – символом предиката «***P***». Если взять предложение «все листья дерева зелены» и обозначить символом «$\forall$» логический оператор всеобщности («все»), символами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ – предикаты, символом $\supset$ – логическую связку «если …, то …», то форму этого предложения можно выразить либо в виде «$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P(x)}$», что читается как «для всех $\boldsymbol{x}$ имеет место $\boldsymbol{P}$ от $\boldsymbol{x}$», либо в виде $\forall \boldsymbol{(x)(P(x) \supset Q(x)}$, что читается как «для всех $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{P}$ от $\boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{Q}$ от $\boldsymbol{x}$». Формой предложения «2+2=4» могут быть выражения: $\boldsymbol{P(a, b, c)}$; $\boldsymbol{a+b=c}$; $\exists \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z(x,y,z)}$; где символ «$\exists$» есть логический оператор существования («существует», «некоторый»). В общем будем считать ясным, о чем идет речь, когда мы говорим о форме предложений.

Допустим теперь, что мы имеем логико-математический язык, на котором можно выразить форму любого предложения содержательной математической теории. Можно-то можно, но как это сделать, если предложений бесконечно много? Тут необходимо применить метод «конечной аксиоматизации» теории, т.е. выявить конечное число таких ее предложений (аксиом), из которых бы по правилам (и законам) формальной логики выводились бы все другие предложения теории. И если у нас такая аксиоматизация получится, то мы выявим форму каждой из аксиом содержательной теории и получим формальные аксиомы. Эти формы будут выявлены в «чистом» виде, так как отвлечены от содержания (от семантики). Затем добавим к этим формальным аксиомам формальную логику (ее правила и законы) и будем получать из формальных аксиом другие формы предложений теории, которые по идее должны представлять все предложения содержательной теории, т.е. получим «формальную теорию», являющуюся формой содержательной теории.

Почему это так? Да потому, что, когда мы применяли формальную логику к аксиомам содержательной теории (равно как и к полученным из них теоремам), то пользовались только формой этих аксиом (и теорем тоже). Дело в том, что, когда мы пользуемся для выводов формальной логикой, то содержание предложений не имеет никакого значения, т.е. мы от него автоматически отвлекаемся. Значит используем только форму предложений. А это все равно где делать: в содержательной теории или формальной (не зависимой от содержания). Вспомним вывод парадокса Рассела. Там мы из $\boldsymbol{M \in M}$ выводили $\boldsymbol{M \in M}$ чисто формально, т.е. никак не опираясь на смысл символов «$\boldsymbol{M}$» и «$\in$». Если же для выводов необходимо знание смысла терминов, то этот вывод является содержательным (не формальным). Так мы выводили из $\boldsymbol{M \in M}$ предложение $\boldsymbol{M \notin M}$, где опирались на смысл терминов «$\boldsymbol{M}$» и «$\in$».

Полученная вышеописанным образом система формальных аксиом вместе с формальной логикой и будет представлять **формальную теорию**, формализующую содержательную теорию. Иногда первую теорию называют формализованной, а вторую – формализуемой. Ясно, что можно произвольно брать наборы формальных аксиом и с помощью формальной логики строить формальные теории, никакого отношения не имеющие к формализации каких-либо содержательных теорий. В данном случае такие теории нас не будут интересовать. Поэтому мы будем говорить о формализованных и содержательных теориях математики, например, формализованной и содержательной арифметике натуральных чисел, которую для краткости будем называть просто арифметикой.

Теперь вернемся несколько назад и вспомним, что же мы предполагали, когда разъясняли, как формализуется содержательная теория и создается формализованная (формальная) теория. А мы предполагали, что можем построить конечную систему аксиом и можем из соответствующих этой системе формальных аксиом вывести все формальные теоремы, которые отображают форму теорем содержательной теории. Последнее означает, что каждому истинному предложению (аксиоме или теореме) содержательной теории мы можем однозначно сопоставить доказуемое предложение формальной теории. Доказательство этого факта (если он имеет место) называется теоремой о полноте (формальной теории относительно содержательной теории, ею формализуемой).

Забегая вперед, скажем, что даже относительно самой простой математической теории – арифметики – не выполняется ни предположение о конечной аксиоматизируемости (в языке логики предикатов первого порядка с равенством), ни о полноте, что, как мы видим, будет иметь самые серьезные последствия для осуществления программы Гильберта.

(2) Синтаксическим методом дать синтаксическое обоснование формальной арифметики. **Синтаксическое обоснование** формальной теории есть доказательство ее синтаксической непротиворечивости. В широко распространенном частном случае, пригодном для обоснования формальной арифметики, **синтаксическая непротиворечивость** формальной теории означает отсутствие в ней некоторого формального предложения (строчки символов вне зависимости от интерпретации) вместе с его отрицанием. Если отрицание

обозначить символом «$\neg$», связку «и» – символом «$\wedge$», а формальное предложение обозначить символом $\boldsymbol{A}$, то синтаксическое противоречие запишется предложением «$\boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{A}$». Доказательство семантической противоречивости или непротиворечивости для формальной теории не имеет смысла, так как у нее нет семантики (во всяком случае мы ее должны рассматривать вне семантики). Стало быть, и нельзя говорить о наличии в такой теории истинных предложений вместе с ложными, т.е. о **семантическом противоречии**.

Доказывать синтаксическую непротиворечивость формальной теории можно как семантическим, так и синтаксическим методом. **Семантический метод доказательства синтаксической непротиворечивости** формальной теории основан на возможности придания ей правильной интерпретации, т.е. интерпретации на такой системе объектов (в частности – математических), на которой все формальные предложения теории превратились бы в истинные предложения, и теория стала бы семантически обоснованной. Однако метод семантического обоснования для программы Гильберта был совершенно не пригоден.

Дело в том, что интерпретация формальной арифметики потребовала бы возвращения к той классической семантике, которая и вызывала сомнение в обоснованности классической математики. Ясно, что нельзя употреблять в доказательстве то, что вызывает сомнения и что, собственно говоря, и требуется доказать. Поэтому для осуществления гильбертовской программы оставался только один – **синтаксический метод доказательства синтаксической непротиворечивости** формальной арифметики натуральных чисел. Этот метод опирается на свойства формальных предложений, т.е. на свойства самих строчек символов. Такой метод гораздо сложнее семантического метода, менее понятен, труднее поддается разъяснению и гораздо реже применяется[4]. Однако Гильберту предстояло пользоваться именно синтаксическим методом синтаксического обоснования формальной арифметики.

Но для этого надо было простроить такую формальную арифметику, которая была бы семантически полна. Иначе как же

[4] Более подробно этот метод разъясняется по книге: Ю.А Петров. «Методологические вопросы анализа научного знания». М., 1977, с.73-94.

можно было говорить о всей арифметике, противоречива она или нет.

Забегая вперед, скажем, что Курт Гедель показал в свой «теореме о неполноте», что формальная арифметика (формализованная в языке логики предикатов первого порядка с равенством) относительно содержательной оказалась не только семантически неполна, но и непополнима. Последнее означает, что для любой конечной системы аксиом формальной арифметики справедливо то, что, сколь бы мы ее ни расширяли, она никогда не будет полностью выражать все истинные предложения содержательной арифметики. Это обстоятельство кратко формулируют в виде тезиса о том, что содержание достаточно богатых теорий, например, арифметики, можно сколь угодно полно выражать через форму, но завершить этот процесс невозможно. Иначе говоря, полная формализация арифметики в языке логики предикатов первого порядка невозможна.

Последнее говорило о том, что гильбертовская программа обоснования математики обречена, что ее ждет неминуемый кризис. Однако Гедель свою теорему о неполноте опубликовал в начале 30-х годов, а Гильберт еще в работе 1927 года был уверен в успехе своего предприятия. Поэтому и мы не будем забегать вперед и пойдем вслед за Гильбертом, хотя вполне могли бы остановиться, сделав вывод о кризисе гильбертовской программы обоснования классической содержательной математики.

Но допустим, что формальная арифметика оказалась семантически полной. Тогда есть смысл говорить о необходимости ее обоснования, которое, как мы знаем, должно быть непременно синтаксическим, да еще должно проводиться синтаксическим методом. А возможно ли это? Опять-таки К. Гедель в «теореме о непротиворечивости», как ее иногда кратко называют, показал, что доказательство непротиворечивости формальной арифметики «финитными» методами невозможно! Это следует из того, что формальная арифметика настолько богатая теория, что любые, приемлемые с позиции программы Гильберта средства доказательства ее непротиворечивости («финитные» средства), формализуются в этой же теории и потому не могут применяться.

Речь идет о так называемых **финитных методах доказательства.** Не разъясняя, что это такое, поясним просто на примере. Так, метод доказательства с помощью полной математической индукции является финитным. Но применять его для доказательства непротиворечивости формальной арифметики нельзя, ибо правило математической индукции формализуется в формальной арифметике, т.е. представляется формулой языка логики предикатов первого порядка с равенством. Напротив, правило трансфинитной индукции не формализуется в формальной арифметике, но для доказательства непротиворечивости этой теории оно не пригодно, потому что относится не к финитным, а к нефинитным методам. Почему же программа Гильберта исключала нефинитные методы? Ведь, как показал Генцен, с помощью нефинитных методов непротиворечивость арифметики вполне можно доказать. А дело в том, что применение **нефинитных методов** возвращает нас к содержанию классической математики, т.е. к тому, что связано с бесконечными множествами, с применением к ним закона исключенного третьего, с нефинитной истинностью и т.п., что для программы Гильберта с самого начала было недопустимым и от чего он при обосновании математики сразу же отказался.

Невозможность доказательства о непротиворечивости формальной математики согласно программе Гильберта дает нам право снова поставить точку и сделать вывод о кризисе этой программы. Но мы снова не будем забегать вперед и пойдем вслед за Гильбертом дальше.

(3) Свести проблему непротиворечивости всех математических теорий к проблеме непротиворечивости арифметики натуральных чисел. Такое сведение осуществляется методом переинтерпретации терминов одной теории в терминах другой. Примеры подобной переинтерпретации хорошо известны из курса аналитической геометрии. Так, точки, линии и тому подобные термины геометрии Евклида интерпретируются в понятиях арифметики действительных чисел. Термины геометрии Лобачевского интерпретируются в терминах геометрии Евклида. Но тогда, если непротиворечива арифметика действительных чисел, то непротиворечива и геометрия Евклида, а если непротиворечива геометрия Евклида, то непротиворечива и геометрия Лобачевского. Оказалось, что если непротиворечива арифметика натуральных чисел, то непротиворечива арифметика действительных чисел, а также и другие математические теории. Стало быть, проблема непротиворечивости математики сводится к проблеме непротиворечивости арифметики натуральных чисел. Теперь проблема синтаксического обоснования математики может

быть решена путем синтаксического обоснования арифметики натуральных чисел.

(4) Обосновать формальную арифметику только с помощью финитной метаматематики. **Финитная метаматематика** изучает формальную математику, т.е. строчки символов (формальные предложения), которые составляют эту математику, их свойства и отношения. Эти строчки символов могут быть сколь угодно большими, но всегда конечными, да к тому же построенными по алгоритмическим правилам построения формул (предложений) формальной теории. Такого рода объекты являются конструктивными **(финитными) объектами,** а истинность суждений о таких объектах называется конструктивной **(финитной) истинностью**.

Финитная метаматематика, таким образом, изучает конструктивные (даже финитные) объекты, и ее содержательные предложения (суждения) являются конструктивно истинными в смысле финитной истинности. Если сравнить финитную метаматематику с нефинитной классической математикой, то можно увидеть огромную разницу, так как последняя изучает не только конструктивные финитные объекты, но и неконструктивные (и нефинитные) объекты (например, бесконечные множества). Суждения классической математики могут быть и нефинитно истинными (неконструктивно, классически, истинными).

При обосновании классической математики согласно программе Гильберта происходит переход от содержательной нефинитной теории к формальной, и для обоснования последней применяется снова содержательная теория – финитная метаматематика. Происходит отказ от одного содержания и привлечение другого содержания. Но разница между этими содержаниями колоссальна, так как обоснование переходит от непосредственной опоры на нефинитное содержание к непосредственной опоре на финитное содержание. Отсюда (с гносеологической точки зрения) при проведении программы Гильберта происходит в процессе обоснования классической математики переход от нефинитной истинности в математике к финитной истинности в метаматематике. В этом и состоит кардинальное отличие программы Гильберта от предыдущих программ обоснования математики. Легко видеть, что в программе Гильберта нет отказа от истинности, как это иногда утверждают, а есть отказ от более сложной истинности и переход к значительно более простой истинности. Затем мы увидим, что программа Гильберта предусматривала возвращение снова к нефинитной истинности, но уже на новой основе.

(5) Семантически обосновать классическую математику. Допустим, что синтаксическая непротиворечивость формальной арифметики была бы доказана, а тем самым эта арифметика получила бы синтаксическое обоснование синтаксическим методом. Тогда надо было бы формализовать все другие математические теории, и их синтаксическое обоснование свести к синтаксическому обоснованию арифметики натуральных чисел. И допустим, что все это оказалось бы выполненным. Тогда вся формальная классическая математика была бы синтаксически обоснованной. В этом случае формальной математике можно было бы придать правильную интерпретацию уже на любых системах математических объектов, в том числе и неконструктивных (и нефинитных), т.е. на объектах «произвольной природы». В результате получилась бы истинная формально-содержательная математика. Формальной она была бы потому, что ее предложения, как и предложения формальной математики, из которой она была получена, распознавались бы только по их форме, независимо от наличия содержания (семантики, интерпретации). Содержательной эта математика была бы потому, что имела бы интерпретацию (семантику). Вот эта-то классическая (интерпретированная на системах объектов классической математики) формально-содержательная математика была бы уже семантически обоснованной в отличие от исходной, просто содержательной неформализованной математики, т.е. была бы истинной.

С философской точки зрения гильбертовская программа по своей идее представляет процесс диалектического отрицания в процессе обоснования математики. Чисто содержательная математика отрицается формальной, чтобы затем возвратиться снова к содержательной, но содержательной на новом уровне развития теории, т.е. к формально-содержательной математике. Различие этих уровней состоит уже в том, что первая (чисто содержательная) теория была семантически необоснованной, а вторая (формально-содержательная) теория была бы семантически обоснованной. А это был бы существенный (качественный) скачок в обосновании математики. Однако, как мы уже говорили, программу Гильберта постиг кризис. Она оказалась невыполнимой по причинам, о которых было выше сказано, но которые можно кратко повторить.

(а) Конечная неаксиоматизируемость содержательной математики, невозможность ее полной формализации.

(б) Невозможность доказательства синтаксической непротиворечивости, т.е. невозможность синтаксического обоснования арифметики, а тем самым и всей математики.

Возникал вопрос, а можно ли вообще семиотически обосновать всю математику? Какой критерий обоснования должен быть принят? И если какая-то часть математики с точки зрения этого критерия окажется необоснованной, то как следует к ней отнестись? На эти вопросы своеобразные ответы давало интуиционистское направление в математике и в обосновании математики.

Интуиционистская программа построения и обоснования математики.

К интуиционистам относились такие математики как Кронекер, Брауэр, Гейтинг. Интуиционистами они именовались потому, что гносеологической основой математики считали интуицию. Причем интуиция понималась как «праинтуиция», как нечто априорное и независимое от опыта. В этом вопросе интуиционисты стояли на идеалистических позициях.

Под обоснованием математики интуиционистами понималось семантическое обоснование, а именно, обоснование истинности математических суждений, основанное на интуиционистском критерии интуитивной ясности исходных математических объектов и абстракций, исходных математических суждений, и эффективном построении производных математических объектов, понятий и суждений. При этом обоснование и построение математических теорий мыслилось как единый процесс. Иначе говоря, предполагалось строить математические теории так, чтобы они заведомо были семиотически обоснованными и не нужно было бы отдельно доказывать их логическую (семантическую или синтаксическую) непротиворечивость. Для этого предполагалось строить математику на понятии интуиционистской эффективности. Что это такое? Вообще говоря, это не очень ясное понятие. Даже сами интуиционисты его представляли по-разному. Во многом эффективность напоминает алгоритмичность, но не в уточненном понимании алгоритма, которого у интуиционистов не было.

Например, до сих пор не ясно, в каком смысле являются эффективными так называемые «свободно становящиеся последовательности». Но все же ясно, что эффективность связывалась с наличием достаточно определенного и ясного метода построения математических объектов, определения понятий и установления истинности математических суждений.

Отсюда интуиционисты предлагали построить математику на следующих основах.

(1) Предметом математики могут быть только эффективно построенные математические объекты. За исключением немногих интуиционистов, интуиционизм полагал, что эти объекты должны строиться в рамках абстракции потенциальной осуществимости. Отсюда следовало, что абстракции актуальной осуществимости и актуальной бесконечности должны быть исключены из математики. Из этого следует неизбежность сильной перестройки арифметики действительных чисел, теории множеств и других теорий классической математики, каким-либо образом использующих абстракции актуальной осуществимости и актуальной бесконечности.

(2) Истинностью математических суждений может быть только интуиционистская истинность суждений об эффективно построенных математических объектах, связанная только с эффективными методами ее установления. Поясним отличие интуиционистской истинности от классической истинности математических суждений на следующих простых примерах. Так суждение формы «$\exists x P(x)$» будет интуиционистски истинно только тогда, когда можно будет указать эффективный метод построения конкретного объекта из области значений переменной x, причем такого, что он обладает свойством P, и это обладание свойством P доказано эффективно. Если подобного метода указать нельзя, то суждение данной формы не будет интуиционистски истинным. Но оно вполне может быть классически истинным, так как классическая истинность с необходимостью не связывается с эффективным методом ее установления. Например, истинность суждения ***«$\exists x P(x)$»*** можно установить так: предположить его ложность, придти к противоречию, и заключить отсюда об истинности этого суждения. При этом можно совершенно не знать, какой же объект обладает свойством P, как его обнаружить, или как его построить. Для интуиционистов подобное установление истинности неприемлемо.

Для интуиционистов суждение формы «$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$» (***A*** или ***B***) будет истинным только тогда, когда будет дан эффективный метод либо установления истинности «***A***», либо установления истинности «***B***». Так, суждение «***A***$\vee$***не-A***» не может считаться интуиционистски истинным, если нет метода установления истинности либо суждения «***A***», либо суждения «***не-A***». Например, интуиционистски нельзя считать истинным суждение «всякое действительное число либо равно, либо не равно нулю», так как нет эффективного метода, позволяющего эффективно решить эту массовую проблему. Однако суждение «***A***$\vee$***не-A***» классически всегда истинно, так как установление этой истинности не обязательно предполагает наличие эффективного метода установления того, какое же из двух предложений «***A***» и «***не-A***» все-таки истинно.

Поэтому-то с точки зрения интуиционистской истинности суждение формы «***A***$\vee$***не-A***» не всегда истинно. Оно истинно только в случае указания метода установления либо истинности «***A***», либо истинности «***не-A***». С точки зрения классической истинности «***A***$\vee$***не-A***» всегда истинно. Поэтому суждение «***A***$\vee$***не-A***» является законом классической логики (как классически всегда истинное суждение, или тавтология), но не является законом интуиционистской логики (так как не являются интуиционистски всегда истинным).

(3) Логикой интуиционистской математики может быть интуиционистская (но не классическая) логика. Интуиционистскую логику впервые построил А. Гейтинг. Эта логика является системой законов и правил, по которым из интуиционистски истинных суждений можно выводить снова интуиционистски истинные суждения. Классическая логика для этого непригодна потому, что не обеспечивает вывода из интуиционистски истинных суждений только интуиционистски истинных суждений. Интуиционистская логика не содержит закона исключенного третьего по причинам, о которых было выше сказано. Не содержит она и правила доказательства от противного, фактически предполагающего законы, из которых следует закон исключенного третьего.

Таким образом, мы охарактеризовали необходимые условия построения интуиционистской математики, которые заведомо обеспечивают ее семиотическую обоснованность. Действительно, конструктивное построение математических объектов заведомо не может привести к построению объекта как со свойством «***P***», так и со свойством «***не-Р***». Поэтому обоснование в смысле логической непротиворечивости тривиально выполняется. Иначе говоря, интуиционистская математика строится так, что проблема ее семиотического обоснования решается самим процессом построения.

Однако это не избавляет интуиционистскую математику от кризиса в обосновании математики. Тут опять вступает в силу диалектическое противоречие между необходимостью семиотического обоснования всей математики (обеспечение ее логической непротиворечивости) и необходимостью сохранения ценных научно-практических результатов математики.

Ведь интуиционисты проблему обоснования ставили так: математика должна принять только те результаты математики, которые интуиционистски обоснованны. А ими являются только лишь положения и теории интуиционистской математики. Все остальные результаты необходимо отбросить. А это сильно сужает и усложняет математику. Например, надо было бы устранить из математики «чистые» (неэффективные) теоремы существования, вообще-то говоря, важные для математики. Доказательства теорем сильно усложняются. Отсюда о кризисе интуиционистской программы обоснования математики можно говорить лишь в теоретико-познавательном аспекте. Что касается прикладного аспекта математики, то по поводу отношения к нему интуиционистской и классической математики идут постоянные споры. Одни говорят, что интуиционистская математика имеет большее прикладное значение, чем классическая математика, другие математики утверждают обратное. Разрешить эти противоречия мы не беремся. Не будем также рассматривать аргументацию в споре между интуиционистами и «классиками». Желающие ознакомиться с этим вопросом подробнее могут обратиться к работам С. К. Клини «Введение в метаматематику», А. Гейтинга «Интуиционизм», а также к работам Г. Вейля, А. А. Маркова и Н. А. Шанина.

Идеи интуиционизма были восприняты и переработаны на новой методологической и философской основе конструктивным направлением в математике.

Конструктивистская программа построения и обоснования математики.

Основной принцип построения и обоснования математики – принцип эффективности, был воспринят у интуиционистов конструктивным направлением в математике, однако был существенно реконструирован. Прежде всего эта реконструкция коснулась самого понятия эффективности. Эффективность стала пониматься на базе уточненного понятия алгоритма. Уточнений понятия алгоритма было предложено несколько. Например, к ним относятся понятия «машина Поста», «машина Тьюринга», «исчисления лямбда-конверсии» А. Черча, «нормальный алгорифм» А.А Маркова, «частично рекурсивная функция» и т.п. Однако все эти понятия оказались эквивалентными. Ясно, что не все то, что считали интуиционисты эффективным, является эффективным с точки зрения уточненного понятия об алгоритме, или, короче говоря, конструктивным.

Нам мало известны философские взгляды многих школ конструктивного направления в математике, так как об этом почти ничего нет литературе. Но известны философские идеи советской школы конструктивизма, основоположниками которой являлись А. А. Марков, Н. А. Шанин. Советская школа конструктивизма так же, как и интуиционистская, исходит из принципа интуитивной ясности исходных объектов конструктивного построения математических объектов, но не связывает интуицию с «праинтуицией». Интуиция понимается на чисто материалистической основе.

В связи с изменением понятия об эффективности, изменяются и понятия эффективного объекта, эффективного построения, интуитивной ясности, эффективной истинности и т.п. Так, например, **конструктивным математическим объектом** считается математический объект, исходные объекты в построении которого либо представлены для непосредственного чувственного восприятия, либо интуитивно ясно представимы, а процесс построения из исходных объектов данного объекта осуществляется с помощью алгоритмов. **Конструктивная истинность** математических суждений должна распознаваться с помощью алгоритмов и т.д. Однако некоторое изменение понятия истинности все же не потребовало изменения логики, обеспечивающей сохранение этой истинности при преобразовании суждений. Поэтому конструктивистские логические исчисления совпадают с интуиционистскими логическими исчислениями. Совпадают именно исчисления, т.е. чисто формальные логические теории. Но семантика конструктивной логики все же отличается от семантики интуиционистской логики. Однако разница этих содержаний не настолько велика, чтобы породить разницу формальных логических построений (логических исчислений).

Между программами конструктивного и интуиционистского обоснования математики есть и кардинальные различия. Прежде всего, по-разному понимается цель обоснования математики. Как мы знаем, интуиционисты ставили целью отбрасывание всей интуиционистски необоснованной части математики. Как следует из выступлений А. А. Маркова, к сожалению, им не опубликованных, конструктивное направление в математике такой цели не преследует. Оно ставит свой целью выделение в «чистом» виде конструктивной части математики и специальное исследование именно этой части, в отвлечении от неконструктивных разделов математики. При такой постановке вопроса речь не идет об обосновании всей математики, разделении ее на обоснованную и необоснованную с тем, чтобы последнюю не считать приемлемой.

Конструктивное построение математики (т.е. построение конструктивной математики) заведомо решало проблему ее семиотического обоснования, по причинам еще более веским, чем это было у интуиционистов. Однако при вышеизложенной цели обоснование конструктивной математики снималось противоречие между необходимостью семиотического обоснования математики (только конструктивной части ее) и необходимостью сохранения теоретико-познавательных результатов всей математики, ибо на них, так сказать, никто и не посягал.

Конструктивисты всегда явно формулировали предпосылки построения конструктивной математики, к ним относятся: абстракция потенциальной осуществимости, абстракция отождествления и различения, и абстракция алгоритма. В отличие от классической математики конструктивная математика не принимает абстракции актуальной осуществимости и актуальной бесконечности. Различия в основаниях классической и конструктивной математики и обусловливают различия в понимании сути, целей и методов их обоснования.

Подведем некоторые итоги решения проблемы обоснования математики четырьмя направлениями: теоретико-множественным, интуиционистским, формалистским и логицистским, так как в философском аспекте между ними есть много общего относительно методологии обоснования математики.

(1) Все четыре программы обоснования математики постигли кризисы неслучайно. За этим лежали глубокие теоретико-познавательные причины. Они базировались на метафизическом подходе к обоснованию математических теорий. Суть этого подхода в том, что всю математику пытались обосновать с помощью какого-то одного абсолютизированного критерия обоснования. Об этом говорит Гейтинг в своей работе «30 лет спустя»[5].

Дело в том, что каждая из упомянутых программ обоснования математики потерпела кризис только в попытке обосновать именно всю математику, т.е. в попытке абсолютного обоснования математики. Но относительно определенных частей математики все эти программы применимы, и ими практически пользуются. Об этом свидетельствует и применение теоретико-множественных моделей, и применении методов формализации и интерпретации при обосновании самых различных теорий в математике, логике и других науках.

(2) Обоснование математики должно базироваться на диалектической теории познания. Почему? Да потому, что эта теория познания (в отличие от метафизической теории познания) провозглашает весьма важный для обсуждаемой проблемы тезис. Оно состоит в том, что никакая теория (в том числе и математическая) не может отобразить действительность, не упрощая, не огрубляя, не «омертвляя» и не идеализируя отображаемое. По этому поводу В.И. Ленин писал: «Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, огрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, – и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия»[6].

Как мы видели, математика может базироваться на качественно различных упрощениях, огрублениях и идеализациях. Поэтому критерии обоснованности тех или иных гносеологически качественно различных частей и разделов математики должны

---

[5] А. Гейтинг. 30 лет спустя / Математическая логика и ее применения. – М., 1965. – С. 224-228

[6] В.И. Ленин. ПСС. Т.29, с.233.

исходить из специфики принимаемых упрощений и идеализаций и не абсолютизировать какие-то одни из них.

В заключение отметим связь семиотического и гносеологического обоснований математики. Эта связь состоит в том, что семиотическое обоснование отвечает на вопрос о возможности гносеологического обоснования. Но этот вопрос решается не в абсолютном смысле, а в относительном. Точнее, этот вопрос в абсолютном смысле решается только для формальных математических теорий, которые в случае синтаксической противоречивости вообще не могут быть признаны как теории, ибо не смогут отображать действительности. С содержательными теориями дело обстоит не так категорично. Даже в случае необоснованности всей теории, могут быть семиотически либо «практически» обоснованы ее части.

С другой стороны, гносеологическое обоснование математики дает базу для семиотических критериев обоснования математических теорий. Оно отвечает на вопрос, почему необходимы критерии непротиворечивости как наиболее общие критерии семиотического обоснования, почему их выбор определяется необходимостью отображения математикой действительности. Так что связь семиотического и гносеологического обоснования математики является взаимообусловленной. Из сказанного ясно также, что без философского анализа нельзя правильно судить о выборе семиотических критериев обоснования теорий, в том числе и математических, ибо это требует выявления упрощений, огрублений и идеализаций действительности, что относится к компетенции гносеологии как раздела философии. Последнее и говорит о значении философии не только для гносеологического, и для семиотического обоснования математики.

Для заметок

Для заметок

ПРОБЛЕМА КОНСТРУКТИВНОСТИ НАУЧНОГО И ФИЛОСОФСКОГО ЗНАНИЯ

СБОРНИК СТАТЕЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ

Редактор Н. Д. Собина
Компьютерная верстка А. В. Кузнецов

Лицензия ИД № 06248 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 28.12.2003 г.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объём 9,8 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. Заказ № 1123.

Издательство Курского государственного университета
305000, г. Курск, ул. Радищева, 33