Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Курский государственный университет»

На правах рукописи

Побережный Иван Александрович

ТРАКТОВКА ЭВРИСТИЧЕСКОЙ РОЛИ АНОМАЛЬНЫХ ЭТАПОВ РАЗВИТИЯ НАУКИ В НАПРАВЛЕНИЯХ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ XX ВЕКА

специальность 5.7.2. – история философии

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата философских наук

Научный руководитель:
доктор философских наук,
профессор Арепьев Е.И.

Курск – 2021

Оглавление

Введение

Актуальность диссертационного исследования. В философско-методологическом наследии XX века проблема развития математики становится ключевой проблемой и, наряду с проблемой обоснования математического знания, вызывает большое количество дискуссий, порождает возникновение двух полемизирующих и дополняющих друг друга направлений – фундаменталистской и социокультурной философии математики. Эти течения продолжают развиваться и в философии науки XXI века. В основаниях математики выделяют также теоретический и практический подходы. Первый рассматривает внутренние факторы развития науки, механизмы, посредством которых формируется целостная система оснований. Второй связан с методологическим обеспечением исследований, процесса развития математики, анализом таких вопросов, как единство математики, истинность математических рассуждений, надежность и формально-логическая строгость математических теорий. В каждом из подходов важным оказывается осмысление аномальных этапов эволюции, периодов научных кризисов, в которые закладываются основы последующего развития, определяются перспективы и возможности науки.

Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью выявления механизмов и закономерностей развития существующих и формирования новых теорий, принципов формирования новых направлений математики в ее аномальные периоды, необходимостью выявления эвристической роли данных этапов.

Объектом диссертационного исследования выступает творческое наследие западной и отечественной философии математики XX века, затрагивающее проблемы развития науки и динамики научного познания.

Предметом исследования выступает эвристическая значимость аномальных этапов развития математики, представленных в направлениях философии науки прошлого столетия.

Степень разработанности проблемы. Исследование особенностей философских оснований математики, философии науки XX века, проблем динамики научного, в частности математического знания, наряду с пониманием обозначившихся тенденций в развитии современной философии математики, показывает повышение интереса научного сообщества к данной проблеме.

Можно выделить несколько групп исследований:

Работы ученых-математиков, философов и логиков, в которых рассматриваются философские аспекты науки, таких, как П. Бернайс, Н. Бурбаки[1], Г. Вейль, Л. Витгенштейн, А. Гейтинг, К. Гёдель, Д. Гильберт, Э. Гуссерль, Р. Дедекинд, Г. Кантор, Р. Карнап, У. Куайн, А.Н. Колмогоров, Р. Курант, Г. Лейбниц, А.Ф. Лосев, А. Пуанкаре, Б. Рассел, Г. Фреге и др.

Исследования вопросов философии и методологии науки, содержащиеся в трудах таких отечественных авторов, как В.И. Аршинов, В.Ф. Асмус, В.Г. Буданов, В.Л. Васюков, П.П. Гайденко, В.С. Готт, В.И. Жог, В.Н. Князев, А.Н. Кочергин, А.Ф. Лосев, Л.А. Микешина, В.М. Розин, В.В. Степин, зарубежных авторов, таких как Б. Барнс, Л. де Бройль, Х.-Г. Гадамер, Г. Динглер, М. Дэвитт, Т. Кун, И. Лакатос, К. Мейясу, К. Поппер, А. Пуанкаре, Г. Рейхенбах, Я. Хинтикка и др.

Работы по философии математики таких отечественных авторов, как С.М. Антаков, Е.И. Арепьев, В.А. Бажанов, А.Г. Барабашев, Б.В. Бирюков, Е.Н. Вечтомов, В.Э. Войцехович, А.С. Есенин-Вольпин, Г.Б. Гутнер, И.Т. Касавин, С.Л. Катречко, В.Н. Катасонов, А.Н. Колмогоров, А.Н. Кричевец, А.Ф. Кудряшев, Б.А. Кушнер, В.Д. Мазуров, В.Т. Мануйлов, Н.В. Михайлова, В.Н. Молодший, В.В. Мороз, М.И. Панов, В.Я. Перминов, Ю.А. Петров, А.В. Родин, Г.И. Рузавин, З.А. Сокулер, В.А. Суровцев, В.А. Успенский, В.В. Целищев, И.М. Яглом, С.А. Яновская, Б.Л. Яшин, зарубежных авторов, таких, как Э. Агацци, Ж. Адамар, Д. Армстронг, И. Бар-Хиллел, А. Бейкер, А.

[1] Псевдоним, под которым публиковалась группа математиков, преимущественно французских (А. Вейль, Ж. Дьёдонне, А. Картан, К. Шевалле и др.), выступая с попыткой дать систематическое изложение современной им математики на основе аксиоматического метода.

Бёрд, Г. Генцен, М. Дамметт, Х.Б. Карри, Ф. Китчер, С. Клини, Р. Курант, А. Мостовски, П. Мэдди, Х. Патнэм, Д. Пойа, М. Резник, Г. Роббинс, Р. Уаилдер, П. Унгер, Л. Флейшхокер, А. Френкель, С. Шапиро, П. Шор и др.

Труды, в которых затрагиваются основные аспекты истории математики таких отечественных исследователей как Ф.А. Медведев, К.А. Рыбников, А.Н. Чанышев, А.П. Юшкевич, зарубежных, как Б.Л. Ван-дер-Варден, Г. Вилейнтнер, А. Даан-Дальмедико, У. Клайн, Ф. Клейн, Ж. Пейффер, Д. Стройк, Г. Цейтен и др.

В современной отечественной литературе можно отметить также ряд работ, содержащих развернутое описание положения дел в философии математики на сегодняшний день.[1] Многие современные исследователи отмечают состояние застоя в философии математики.[2]

В этих исследованиях представлен историко-философский анализ становления и развития научного и математического знания, а также философских оснований математики. Показаны различные точки зрения на развитие математики, на формирование математической парадигмы, на причины и движущие силы этих процессов.

Многочисленные работы указывают на важность построения новых вариантов обоснования математического знания и высокий интерес к проблемам гуманизации науки и образования, к разработке нового видения действительности, к расширению пределов миропонимания. Они служат базой для определения места философии математики в духовной культуре первых десятилетий XXI века.

Таким образом, на данный момент имеется достаточно обширная литература по истории философии, философским основаниям математики, посвященная проблеме развития математического и научного знания.

---

[1] Барабашев, А. Г. Будущее математики: Методологические аспекты прогнозирования. М., 1991. 157 с.; Перминов, В.Я. Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320 с.; Целищев, В.В. Философия математики. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 2002. 212 с.; Целищев, В.В. Онтология математики: объекты и структуры. Новосибирск: Нонпарель, 2003. 240 с. и др.

[2] Hersh, R. A Fresh Winds in the Philosophi of Mathematics // Amer. Math. Monthly. 1995. Aug.-Sept. P. 590-591; Hintikka, J. Lingua Universalis vs Calculus Ratiocinator. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. и др. Об этом подробнее см.: Целищев, В.В. Философия математики. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 2002. С. 16.

Однако исследований, направленных на построение развернутой интерпретации эвристической роли аномальных этапов в развитии математического знания до настоящего времени не предпринималось. Данная диссертация призвана в некоторой степени способствовать заполнению данного пробела.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования: построение развернутой интерпретации эвристической роли аномальных этапов развития науки в философии математики XX века.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

– раскрыть эволюцию представлений о математических понятиях в рационалистической традиции европейской философии;
– выявить основные черты фундаменталистского и социокультурного подходов к обоснованию математики в XX веке;
– определить главные тезисы, отражающие характер полемики в современной отечественной и зарубежной философско-математической мысли;
– систематизировать основные философско-методологические трактовки закономерностей развития научного знания;
– раскрыть динамику представлений об эвристической роли кризисных периодов развития математики в философско-методологическом наследии XX века;
– сформулировать на основе концепций философии математики прошлого столетия наиболее перспективные подходы к трактовке эвристической роли понятийного базиса для становления новых разделов математики.

Теоретико-методологическая основа исследования.

Поскольку диссертационное исследование в целом носит историко-философский характер, в нем применяются:

– источниковедческий метод при работе с первоисточниками и критической литературой;
– метод историко-философской реконструкции, который позволит приблизиться к пониманию взглядов мыслителей различных эпох для оценки их теоретических конструкций;
– метод сравнительного анализа, предполагающий сопоставление концепций друг с другом, и обеспечивающий возможность типологических обобщений.

Научная новизна исследования.

Новизна работы состоит, прежде всего, в комплексном осмыслении эвристического потенциала аномальных этапов развития математического знания на основе философско-методологического наследия XX столетия, которое позволило получить следующие результаты:

1. В работе предложено осмысление эволюции рационалистических представлений о математических понятиях, раскрыты особенности этих представлений в различные периоды развития человеческого знания.

2. В диссертации выявлены характер взаимодействия фундаменталистской и социокультурной философии математики, противоречие и единство этих подходов в процессе формирования сущностных оснований математического знания, в раскрытии эвристического значения его аномальных периодов.

3. Показаны непосредственно влияющие на понимание и развитие математики проблемы, порождающие полемику, как в отечественной, так и в зарубежной философско-математической мысли. Это, прежде всего, вопросы бытийно-познавательного истолкования основ данной науки, порождающие многочисленные версии реализма, номинализма, эмпиризма,

психологизма и их симбиозы.

4. Систематизированы основные философско-методологические трактовки закономерностей развития научного знания, в свете которых история математики делится на периоды кумулятивного накопления знаний и аномальные, революционные этапы.

5. Раскрыта динамика наиболее значимых представлений об эвристической роли кризисных периодов развития математики в философско-методологическом наследии XX века.

6. Определен наиболее перспективный подход к трактовке эвристической роли понятийного базиса в становлении новых разделов математики.

Положения, выносимые на защиту.

1. Рационалистические представления о математических понятиях эволюционируют от античности до наших дней. Преобразование взглядов совершает диалектический круг, возвращаясь к исходным положениям на новом уровне. Трактовка математических истин как приемов землемерия и счета, как сущности мира, космоса, как божественных истин, как эмпирических обобщений и свойств разума, как средства естествознания и способа универсализации языка, к XX столетию вновь возвращается к идее абстрактного выражения наиболее общих свойств и связей действительности. В науке XX в. математика все более стала выступать в качестве эвристического средства, того, что позволяет предвидеть путь дальнейшего движения научного поиска, путь, на котором просматриваются возможности будущих открытий законов реального мира. Пифагорейская идея внутренней гармонии из критерия истинности превратилась в настоящее время в один из эвристических принципов.

2. Представители фундаменталистского и социокультурного подходов в философии математики, по-разному оценивая генезис и эволюцию математического знания, сходятся в признании эвристической роли ано-

мальных этапов (кризисов) в развитии математики.

3. Трактовка природы математических объектов и истин, критерии истинности претерпели значительную трансформацию в XX веке. Проблемы, порождающие полемику, как в отечественной, так и в зарубежной философско-математической мысли, – это, прежде всего, вопросы бытийно-познавательного истолкования, разработка моделей онтологических и гносеологических основ математики, – приводят к возникновению многочисленных версий реализма, номинализма, эмпиризма, психологизма и их симбиозов.

4. Аномальные этапы в ходе развития математики, как и в естествознании, приводили к возникновению новых математических теорий, новых направлений, концепций, расширению структуры, принятию новых парадигмальных установок.

5. Фундаментальный кризис начала XX века и его развитие не привели к явной победе какого-либо из сформировавшихся в этот период направлений – логицизма, формализма, интуиционизма, реалистической или языковой трактовки математики. Это свидетельствует о несостоятельности претензий любого из течений на единственность и самодостаточность, свидетельствует о взаимосвязи и взаимодополняемости их результатов. Эвристическая значимость аномальных этапов развития науки подверглась многоаспектному осмыслению в философии математики прошлого столетия и была описана, как в явной, так и имплицитной формах. Наиболее конструктивным обобщением выявленных установок этого периода является утверждение, что математика выступает как эвристическое средство, как система представлений, которая может идти впереди остального знания и в определенной мере формировать его структуру.

6. Наиболее перспективным подходом к трактовке эвристической роли понятийного базиса в становлении новых разделов математики целесообразно считать такой подход, согласно которому аномальные периоды в развитии математики обуславливают необходимость пополнения ее

базисного набора понятий новыми, обладающими сущностной значимостью и спецификой элементами. Именно они позволяют создавать новые разделы этой науки. Данная схема действует, как в преодолении обнаруживающихся внутренних противоречий, так и для ответа на запросы соответствующего этапа эволюции науки в целом.

Теоретическая значимость исследования.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что посредством его результатов станет возможно дополнение существующей в настоящее время картины онтологических и теоретико-познавательных основ математического знания, расширение круга подходов к проблемам философии науки и философии математики в частности, более полное осмысление закономерностей развития математики.

Практическая значимость исследования.

Практическая значимость исследования заключается в том, что его результаты могут быть использованы при разработке прогнозов и определении перспектив развития математических областей. Материалы диссертации могут использоваться при подготовке курсов «Методология научного знания», «История и философия науки» для аспирантов физико-математических специальностей, а также спецкурсов, связанных с философскими основаниями математики.

Личный вклад автора состоит в том, что в ходе данного диссертационного исследования был проведен комплексный анализ достаточно обширной литературы, в том числе англо- и немецкоязычной (непереведенной на русский язык), по истории философии, а также по философским основаниям математики, посвященной проблеме развития математического и научного знания, на основании которого построена развернутая интерпретация эвристической роли аномальных этапов развития математики в философии математики XX века. Подготовлено 10 научных публикаций, отражающих основные элементы научной новизны диссертации, 5 из них в журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ.

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций подтверждается:

использованием в исследовании историко-философских методов и научно-методологических подходов при рассмотрении темы;

опорой на фундаментальные отечественные и зарубежные теории;

согласованностью выводов с предшествующей критической традицией исследователей философии математики.

Апробация исследования.

Основные результаты и выводы работы апробированы в выступлениях автора на ряде научных и научно-практических конференций, в частности «Коммуникативные стратегии информационного общества» (Санкт-Петербург, 2017), «Инновационная деятельность науки и образования в агропромышленном производстве» (Курск, 2019), «Инновации в научно-техническом обеспечении агропромышленного комплекса России» (Курск, 2020), «Диалог культур в современном мире: новые явления в эпоху цифровой цивилизации» (Ростов-на-Дону, 2020), VIII Российский философский конгресс по теме «Философия в полицентричном мире» (Москва, 2020), «Актуальные проблемы современной науки: исторические, философские, методологические аспекты» (Курск, 2021), а также в научных публикациях, в том числе в изданиях, рекомендованных ВАК.

Материалы исследования использовались автором во время профессиональной педагогической практики при чтении лекций и проведении семинарских занятий со студентами различных факультетов Курского государственного университета.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих шесть параграфов, заключения и списка литературы. Библиография содержит 165 источников.

Глава 1. Математические достижения как объект философского осмысления – история и современность

1.1. Представление о математических понятиях в рационалистической традиции европейской философии

Математика в ходе формирования и развития на протяжении первых веков своей истории была тесно связана с потребностями человека и человеческого общества в измерении и счете. Данные потребности прежде всего относились к таким областям человеческой деятельности, как земледелие, скотоводство, строительство, учет трудовой деятельности, налогообложение. Изучение звездного неба позволяло прокладывать морские пути для торговых и военных целей, прокладывать караванные пути в новые земли и значительно увеличить торговлю между отдаленными государствами. Обмен товарами неизбежно приводил к обмену культурными ценностями.

Уже вавилонская и египетская цивилизации оставили следы использования математических абстракций. При раскопках в Месопотамии были обнаружены сотни глиняных табличек XIX – XVI веков до нашей эры, клинописные записи на которых были определены как математические тексты. На табличках были обнаружены ряды чисел и геометрические построения.[1] Большинство подобного рода записей на клинописных табличках относятся к разряду хозяйственных вычислений и расчетов. О существовании египетской математики примерно в то же время свидетельствуют найденные папирусные и кожаные свитки с иероглифическими записями математических задач и описанием их решений.

Математические знания изначально во всех сферах человеческой деятельности занимали особое место, в том числе и в первобытных религиях. «Религиозные обряды были насквозь пронизаны магией, магический

[1] Ван дер Варден, Б.Л. Пробуждающая наука. Математика др. Египта, Вавилона и Греции – [Пифагорейское учение о гармонии]. Пер. с голланд. и замеч. И.В. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959. С.14.

элемент входил в состав существовавших тогда числовых и геометрических представлений, проявляясь также в скульптуре, музыке, рисунке».[1] Понятие числа всегда сопровождалось и нечисловыми понятиями. Но при этом необходимо отметить, что именно математика придавала законченный вид всем областям знания, где она применялась.

Принято считать, что европейская философия взяла свое начало в Древней Греции, мыслители которой разработали новую форму рассуждения, опирающегося на логическое доказательство, что впоследствии послужило возникновению рационалистического подхода к изучению окружающего мира и формированию рационалистической традиции западной философской мысли. М. Клайн, утверждая, что «греки совершили открытие, величайшее из когда-либо совершенных человеком: они открыли могущество разума»[2], выражает главную установку античной цивилизации: человек может постигнуть тайны мироздания не мистическим образом, а с помощью способности мыслить. Научность математики впоследствии была связана с доказательностью ее утверждений. Математическое доказательство возникло в Древней Греции, и первые доказательства связывают с философом Фалесом Милетским. К VI – III векам до нашей эры относят также великих математиков (геометров) Пифагора, Евклида и Апполония, известных нам благодаря упоминаниям в работах античных авторов, а также по собственным работам Евклида и Апполония.

В Древней Греции математические рассуждения были тесно связаны с рассуждениями философскими. Согласно легенде, на входе в школу Платона была надпись: «Не геометр да не войдет». Для Платона математика была той самой пропедевтической системой, которая готовила и подводила человеческий разум к постижению философии, к созерцанию высших идей.

---

[1] Стройк, Д.Я. Краткий очерк истории математики. Пер. с нем. 5-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990. С. 26.

[2] Клайн, М. Математика. Утрата определенности: пер. с англ. / под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. - М.: Мир, 1984. С. 18.

Школа Пифагора считается первой школой, в которой математика формируется как философское учение. Пифагор – знаменитый мыслитель и философ VI – V веков до нашей эры. Считается, что именно он впервые стал использовать слово «философ» – «любящий мудрость». Пифагорейцы «рассматривали числа как образующие элементы материи»[1], т.е. их учение выходит за рамки математики в нашем ее понимании, и в центре его лежит конкретное понимание сущности математического знания. Девизом пифагорейской школы было утверждение «Всё есть число». Пифагор полагал, что в основе всего, существующего в мире, лежит число, и всё в мире определяется числами или отношениями чисел. «Начало всего – единица; … из единицы … исходят числа; из чисел – точки; из точек – линии; … из них – чувственно-воспринимаемые тела».[2] По Пифагору, все вещи и геометрические фигуры подобны числам.

Однако суть пифагорейской философии заключается вовсе не в том, что всякая вещь и всякий процесс могут быть определены количественно. В отличие от мировоззренческих систем древних царств, философия Древней Греции была прежде всего нацелена «на отыскание первоосновы мира, начала, из которого можно было бы объяснить все происходящее».[3] И если у Фалеса таким началом была вода, а у Гераклита огонь, то у Пифагора первоначалом мира является число. На основании этого изучение и познание мира сводится к познанию чисел и геометрических фигур, а критерием истинности знания становится его соответствие их гармонии. Иными словами, познать мир – это значит познать управляющие им числа и отношения чисел.

Пифагорейская школа, заложившая основы древнегреческой арифметики и геометрии, нашла свое развитие в сочинениях Платона. Математические объекты у Платона реально существуют в трансцендентном

---

[1] Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очер¬ки по истории математики/Пер. с франц. А.А. Брядинской. Под ред. И.Г. Башмаковой. М.: Мир, 1986. С. 62.
[2] Лосев, А.Ф. История античной эстетики. Тт. 1, 2.М.: АСТ, 2000. С. 430.
[3] Никаноров, С.Н. Число у Аристотеля и в философии Нового времени. [Электронный ресурс]. http://turba-philosophorum.narod.ru /forskninger/Nikanorov/1_Num_ Arist.html

«мире идей». А.Ф. Лосев отмечает: «Каждое число Платон понимает как ту или иную структуру».[1] Далее А.Ф. Лосев указывает на «силовую», «энергийную» природу чисел у Платона: «Число является как бы каким-то заряженным оружием».[2] Число для Платона – принцип, который обеспечивает организованность и определенность жизни.

Пифагорейский взгляд на природу – это способ видения природы, оказавший большое влияние на дальнейшее развитие науки. Ученый с таким подходом считает, что реальностью является математическая гармония, которая присутствует в природе. Математическая гармония – это соразмерность частей друг с другом и части с целым. Убежденный пифагореец считал, что через познание математической гармонии открывается фундаментальная структура Вселенной.

Эта ориентация возникла в шестом веке до нашей эры, когда Пифагор и его последователи обнаружили, что музыкальные гармонии могут быть сопоставлены с математическими соотношениями. Пифагорейцы обнаружили, что эти соотношения сохраняются независимо от того, производятся звуки вибрирующими струнами или резонирующими воздушными колоннами. Впоследствии пифагорейские натурфилософы пытались читать музыкальные гармонии во Вселенной в целом. Они связывали движения небесных тел со звуками и получалась «гармония сфер».

Через столетие после Пифагора в античную культуру пришел Сократ, который развил философию до такой степени, что с тех пор она стала важнейшим элементом всей греческой культуры. Ученик Сократа Платон позже определил философию как особый вид искусства – «искусство мышления». Платон противопоставляет «чистую геометрию» ее практическому применению, а геометрическую астрономию – наблюдению световых полос на небе. Платон отвергал «чисто эмпирическое» знание о последовательности и сосуществовании явлений. Такого рода «знание» должно быть трансцендировано таким образом, чтобы проявился лежа-

[1] Лосев, А.Ф. История античной эстетики. Тт. 1, 2. М.: АСТ, 2000. С. 370.
[2] Там же.

щий в его основе рациональный порядок. Влияние идей Платона выражалось прежде всего в общем отношении к науке. Платон верил в упорядоченность Вселенной и важность ее познания. В «Тимее» Платон описал сотворение Вселенной Демиургом, который наложил математическую форму на бесформенную первичную материю.[1] В каком-то смысле это было позже заимствовано христианскими апологетами, которые отождествляли эту модель с Божественным планом Творения. Последователи Платона видели задачу философа в том, чтобы построить рациональную интерпретацию, раскрывающую порядок Вселенной.

Сам Платон предположил в «Тимее», что пять «элементов» – четыре земных и один небесный – могут быть соотнесены с пятью правильными геометрическими телами. Он соотнес тетраэдр с огнем, потому что тетраэдр – это правильное геометрическое тело с самыми острыми углами, а огонь является самой проникающей из всех стихий. Куб Платон соотносит с Землей, так как куб является наиболее устойчивым на своем основании и требует наибольшего усилия, чтобы его опрокинуть. Октаэдр соответствует воздуху, икосаэдр – воде и додекаэдр – небесной материи. Кроме того, он предположил, что превращения между водой, воздухом и огнем происходят в результате «растворения» каждого из них.[2] Таким образом, платоновское объяснение природы и ее свойств в терминах геометрических фигур близко к пифагорейской традиции.

Во II веке нашей эры К. Птолемей сформулировал ряд закономерностей и построил математические модели для каждой известной тогда планеты. Одной из важных особенностей этих моделей является использование связанных кругов для воспроизведения видимых движений планет относительно зодиакальных созвездий. Птолемей подчеркивал, что для сохранения видимости движения планет можно построить не одну математическую модель, и что его сложная система кругов раскрывает струк-

[1] Платон. Тимей. Перевод С. Аверинцева. В кн.: Платон. Собр. соч. в 4-х томах. Том 3. М.: «Мысль», 1994. С. 425.
[2] Там же. С. 440.

туру физической реальности.[1]

Платона можно считать первым, кто задался вопросом о природе и структуре математики, осознавая абстрактный характер математических моделей и объектов. Модели незыблемы, универсальны и постоянны, так как они принадлежат «миру идей». Идеальная окружность вечна и неизменна, в отличие от мимолетного круга на воде. Разум, по Платону, представляет собой высшую способность человеческой души. Математика Платона отделена от физического мира, и эта ее особенность привела к тому, что в доказательстве стало запрещаться любое обращение к опыту, что в свою очередь допускает использование лишь дедуктивных форм доказательств и рассуждений. В философии Платона дана формулировка главных принципов рационализма, приведено обоснование его превосходства, а значит и безусловного приоритета математических методов познания.

Аристотель – самый известный из учеников Платона. Но в отличие от Платона, для которого обладание знанием тождественно созерцанию, для Аристотеля оно связано с умением провести рассуждение, способность и умение объяснить. У Платона математические объекты полностью относились к «миру идей», а Аристотель выделял из них «универсальные сущности» – геометрические формы и числа. Он полагал, что математические объекты имеют абстрактное значение. Именно по этой причине математика представляет собой более высокую ступень знания по сравнению с теми областями, которые имеют дело с материальными объектами. Высший статус математики, ее универсальность определяются именно ее неонтологичностью, универсальностью ее логических параметров.[2]

Среди многих известных греческих математиков отметим также Евдокса (408 – 355 до н.э.), Евклида (356 – 300 до н.э.), Архимеда (287 – 212

[1] См. Птолемей, К. Альмагест / Перевод с древнегреческого И. Н. Веселовского, Науч. ред. Г.Е. Куртик. М.: Наука, 1998. 672 с.
[2] Аристотель. Метафизика//Аристотель. Сочинения в 4-х т. [Перевод]. Т.1/Ред. В.Ф. Асмус. М.: Мысль, 1975. С. 223.

до н.э.), Аполлония (262 – 190 до н.э.), Диофанта (III в. н.э.). Трактат Евклида «Начала геометрии», полностью отвечающий требованиям дедуктивности и доказательности, стал вершиной математической культуры Древней Греции и оказал огромное воздействие на всю человеческую культуру. На протяжении более двух тысяч лет он считался образцом математической доказательной строгости в построении научной теории. И в целом методологические установки древнегреческой математики и философии оказали огромное влияние на развитие философской мысли, связанной с математической методологией научного познания вплоть до нашего времени.

В раннем средневековье развитие математики в Европе практически прекратилось, и математическая наука на несколько веков переместилась в мусульманские страны. Приблизительно до VI – VII вв. уровень математики арабского Востока, Персии и Средней Азии был сначала намного выше, а затем сопоставимым с уровнем европейской математики.

Новый этап развития математики в Европе начинается в конце XII столетия, и на протяжении четырех веков европейская математика в ряде отношений уже сравнима с древнегреческой. В XV–XVI веках наблюдается стремительное развитие тех разделов математики, которые связаны с понятием числа, и здесь важным моментом становится широкое использование символьных обозначений, которое практически полностью отсутствовало у древних греков (за исключением обозначения цифр) и у математиков Востока.[1]

Математику XVI–XVII столетий прежде всего следует связать с именем Г. Галилея, который считал математику языком «книги природы». Этот ученый сформулировал парадокс, который впоследствии был назван его именем («парадоксом Галилея»)[2]: натуральных чисел существует столько же, сколько их квадратов, хотя большинство натуральных чисел

[1]Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / Пер. с франц. А.А. Брядинской. Под ред. И.Г. Башмаковой. М.: Мир, 1986. С. 286.
[2] История математики. Т. I. С древнейших времён до начала Нового времени / Под редакцией А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. С. 142.

не являются квадратами.

Другой математик этой эпохи Лука Пачоли, монах-францисканец, крупнейший европейский алгебраист XV века, в 1494 году опубликовал работу «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций», в которой было подробно изложены правила действий над целыми и дробными числами, пропорции и действия над ними, задачи на сложные проценты, решение различных алгебраических уравнений. В дальнейшем имело место исследование бесконечных множеств (Н. Кузанский, Г. Галилей), изучение их природы, их классификация, что в будущем привело к созданию новой научной теории – теории множеств.[1]

Теория движения в средневековой физике была основана на учении Аристотеля, и в формулировке законов движения математика не использовалась, поскольку физика в то время была чисто качественной наукой, тогда как математика – наука абстрактная. Последователи Аристотеля вслед за ним понимали математику как науку, которая «исследует отвлеченное… оставляет только количественное и непрерывное».[2] Применение математического аппарата к формулировке законов механики не допускалось в самой теории физики того времени, основанной на учении Аристотеля, в котором и физические явления, и свойства физических тел однозначно определялись двумя парами противоположных качеств: «теплое – холодное» и «сухое – влажное». Аристотель считал, что изменение каждого из этих качеств приводит к превращению элементов. Математическое отвлечение от этих качеств, по Аристотелю, приведет к отвлечению от возможности реального познания мира, в том числе и законов движения. Так, евклидова геометрия описывает неограниченное пространство, которое может быть и пустым, в то время как реальный Космос Аристотеля имеет шарообразную форму, а природа не терпит пустоты. Само понятие бесконечности не может относиться к чему-то существующему, по-

---

[1] Там же. С. 287.

[2] Аристотель. Метафизика//Аристотель. Сочинения в 4-х т. [Перевод]. Т.1/Ред. В.Ф. Асмус. М.: Мысль, 1975. С. 141.

этому математика для средневекового мыслителя, строящего картину мира по учению Аристотеля, не могла строить модели Вселенной, мира, описываемого физикой. Считалось, что цели и планы Творца настолько выше возможностей человеческого понимания, что любые рациональные построения человека могут быть слишком далеки от реальности. Ценность занятий математикой в Средние века не отрицалась, а, напротив, всячески утверждалась. Но эта ценность понималась в том, что геометрия и арифметика отвлекают умственный взор от чувственного мира и устремляют его к вечному, к непреходящему. Так, для Августина Аврелия, для которого число было связано с мудростью, математика выступала как ступень к познанию Бога. Но это не имело отношения к знанию об окружающем реальном мире, которое носит практический характер.

В эпоху Возрождения математика впервые выходит за пределы знаний, которые были получены от древних греков. Вводятся такие качественно новые понятия, как дробные и отрицательные показатели степени, теоретически оформляется позиционная десятичная система счисления. В это же время формируются научные и практические предпосылки к изучению переменных величин.

В эту же эпоху, начиная примерно с XV в., значение и ценность математики коренным образом меняются. Мыслители этой эпохи начинают связывать ценность знания не с тем, к какой сфере оно принадлежит, а с тем, насколько оно достоверно. Уже Н. Коперник, разработавший гелиоцентрическую систему движения планет, видел ее достоинства прежде всего в том, что ему удалось значительно упростить модель мироздания, устранив «лишние» математические конструкции. Математические конструкты системы Коперника точнее отражают гармонию Космоса, и к ним, в отличие от более ранних построений, предъявляется требование быть описанием реального устройства мира. Сам же Космос организован по строгим, простым и гармоничным математическим принципам. В разумно устроенном Космосе именно Солнце, а не Земля, должно быть центром мироздания.[1]

Г. Галилей максимально воплощает стремление к математической интерпретации законов Вселенной и к полному устранению разрыва между математической теорией и практическим состоянием реального мира. Сформулированный Г. Галилеем идеал математизированного познания природы состоит в том, что физической реальности придается математическая сущность.[2] Галилей, подобно Платону, считает математику механизмом познания вечных истин и исправления того, что возникло в результате ложной информации чувств. Однако, в отличие от Платона, для Галилея математика – это не просто подготовительный этап для философии, а сама по себе надежнейший философский метод познания мира. Галилей устанавливает закономерности и ищет законы, которые описывали бы реальное состояние мира, природы, и при этом были бы такими же точными, как законы геометрии. Сама философия у Галилея написана в величественной книге (в самой Вселенной) на великом языке математики. Галилей считал, что даже текст Писания приспосабливается к уровню понимания тех, кому он предназначен, а материальный мир однозначен, – это подлинная книга Откровения Бога без каких-либо искажений вечной и неизменной истины Бытия.

Новое время, – эпоха, начинающаяся с XVI – XVII вв., когда формируется новое понимание науки, новая методология научного познания, новые концепции социальной философии, находит отражение и в глубоких научно-теоретических трансформациях, связанных со становлением новой математики. Изменения касаются самих оснований математического знания, понимания природы числа, пространства, норм доказательства и являются достаточно существенными.[3] Следует заметить, что математика XVII в. достаточно консервативна, и труды античных математиков яв-

---

[1] Коперник, Н. О вращениях небесных сфер. Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись / Перевод И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1964. 653 с.
[2] Галилей, Г. Пробирных дел мастер. М., 1987. С. 125.
[3]Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / Пер. с франц. А.А. Брядинской. Под ред. И.Г. Башмаковой. М.: Мир, 1986. С. 235.

ляются для нее столь же авторитетными, как и для античности. Однако надо признать, что то новое, что создается в это время, – методы дифференциального и интегрального исчислений, техника вычислений с бесконечными рядами, проективная геометрия, элементы теории вероятностей, – с необходимостью ведет к расширению классических античных норм понимания математического знания.

На протяжении XVI – XVIII веков в философской среде становятся актуальными дискуссии, касающиеся новых математических методов, и обсуждение математических проблем поднимается до уровня философского диалога. Математика открывается как наука, в глубокой степени вовлеченная в философствование, как наука, совершающая свое самоопределение. Математика представляет собой не только инструмент открытия истины, но и один из эффективных способов ее утверждения, поскольку истиной теперь считается не только то, что есть, но и то, что должно быть.[1]

«Возросшая роль математизированного естествознания … приводит к постановке и разработке важнейших философских проблем, среди которых проблема метода познания занимает центральное место».[2]

В середине XVII века европейская математика начинает изучение переменных величин, которые связывают с именами Р. Декарта, И. Ньютона, Г.-В. Лейбница.

Одним из главных тезисов Р. Декарта было утверждение о том, «математика – мощный и универсальный метод познания природы, образец для других наук», сформулированное в его «Началах философии» (1644).[3]

В 1637 году была опубликована «Геометрия» Р. Декарта[4], которая включила классическую геометрию в алгебру. Именно в этой работе Де-

---

[1]Рыбников, К.А. История математики: Учебник. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 120

[2] Арепьев, Е.И. Аналитическая философия математики. 2 изд-е, доп. / Е.А. Арепьев. Курск: Изд-во Курск. гос. пед. ун-та, 2003. С.44

[3] Декарт, Р. Рассуждение о методе. Метафизические размышления. Начала философии. Луцк: Вежа. 1998.С. 147 – 292

[4] Декарт, Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. М.–Л.: Гостехиздат, 1938. 297 с.

карт показывает, как некоторые геометрические задачи могут быть решены с помощью алгебраических уравнений. Значение той связи, которую Декарт установил между геометрией и алгеброй, действительно было велико, поскольку без нее математизация физики и развитие исчисления вряд ли могли бы произойти поколение спустя через И. Ньютона и Г. Лейбница.

Ранее идею координат использовал Апполоний при определении конических сечений, а также Птолемей в своей «Географии», обозначая широту и долготу. Декарт связал между собой алгебру и геометрию, математические дисциплины, которые до этого считались совершенно разными. Если в Античности происходила геометризация математики,[1] то с Р. Декарта начинается обратный процесс. Именно Декарт развил понятие функции, которое впоследствии стало важнейшим понятием математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений Ньютона и Лейбница), который стал вскоре важнейшим направлением математической науки и математических исследований. Важность нового направления математики была обусловлена его прикладным характером, широкой применимостью к исследованию всевозможных форм движения.

Математика открывается европейским ученым как наука, которую можно использовать в описании всех процессов бытия и повседневной жизни. XVII век стал веком стремительного развития естественнонаучного познания. Г. Галилей и Т. Браге вели астрономические наблюдения, на основе которых было собрано огромное количество математических данных, описывающих изменение положения небесных тел. Помощник Т. Браге И. Кеплер, также серьёзно занялся изучением движения небесных тел. Расчеты Кеплера были упрощены благодаря изобретению логарифмов Д. Непером и Й. Бюрги. Кеплер сформулировал математические законы движения планет. Аналитическая геометрия, которая была разработана Р. Декартом, позволила построить эти орбиты на графике в декарто-

[1] Ван дер Варден, Б.Л. Пробуждающая наука. Математика др. Египта, Вавилона и Греции – [Пифагорейское учение о гармонии]. Пер. с голланд. и замеч. И.В. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959. С. 132.

вых координатах. Затем И. Ньютон, опираясь на многочисленные работы предшественников, открыл законы механики, из которых он вывел и смог объяснить законы Кеплера, а также систематизировал понятия в системе, ныне известной как исчисление бесконечно малых. Г. Лейбниц был одним из создателей дифференциального и интегрального исчислений, теории бесконечных рядов, одним из первых ученых, попытавшихся построить формальные языки для разных научных дисциплин. Для Г. Лейбница характерно настойчивое стремление к синтезу знания, к раскрытию философского значения новых математических методов и конструкций. Г. Лейбниц в своей работе «Элементы разума» пишет: «… судьба даровала нашему веку прежде всего то, что после столь долгих лет забвения вновь воссиял светоч математики».[1]

Лейбниц полагал, что большая часть человеческих рассуждений может быть сведена к определенного рода вычислениям, и что такие вычисления могут разрешить многие разногласия во мнениях: «Единственный способ исправить наши рассуждения – сделать их такими же осязаемыми, как рассуждения математиков».[2]

Он предложил создать «универсальную характеристику», построенную на алфавите человеческого мышления, в котором каждое фундаментальное понятие было бы представлено уникальным «реальным» символом. Сложные мысли будут представлены объединением символов более простых мыслей. Лейбниц видел, что уникальность простой факторизации предполагает центральную роль простых чисел в универсальной характеристике.

Когда Лейбниц впервые написал о характеристике, он рассматривал ее не как алгебру, а, скорее, как универсальный язык или письменность. Позже он задумал своего рода «алгебру мышления», смоделированную по образцу и включающую обычную алгебру и ее обозначения. Полученная

[1] Лейбниц, Г.В. Новые опыты о человеческом разуме автора системы предустановленной гармонии. Пер. с франц.//Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. Т.2/Ред., авт. вступ. ст. и примеч. И.С. Нарский. М.: Мысль, 1983.С. 452.

[2] Там же. С. 338.

характеристика включала логическое исчисление, некоторую комбинаторику, алгебру, универсальный язык понятий и многое другое. Идея Лейбница о рассуждении с помощью универсального языка символов и вычислений предвосхищает достижения 20-го века в формальных системах, таких как теория вычислимости, в которой в качестве характеристики множества используется «полнота по Тьюрингу», а вычисления применяются для определения эквивалентных универсальных языков.

Лейбниц считается одним из самых значительных логиков между временами Аристотеля и Г. Фреге. Именно Лейбниц сформулировал основные свойства логических операций, которые впоследствии были названы конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием, тождеством. Однако почти ничто из работ Лейбница по логике не было опубликовано при его жизни, а осталось только в черновиках. Уже в XX Б. Рассел писал в «Истории западной философии», что Лейбниц развил логику в своих неопубликованных трудах до такого уровня, какой был достигнут только 200 лет спустя.

Г. Лейбниц полагал, что математические утверждения в конечном счете могут быть сведены к системе из самотождественных утверждений, так как эти истины являются врожденными. «Математика и метафизика образуют, по Лейбницу, систему необходимых истин, противостоящих случайным истинам, взятым из опыта», – пишет известный современный отечественный философ математики В.Я. Перминов.[1]

Одним из глубочайших убеждений Г. Лейбница была уверенность в том, что математическое знание имеет метафизическую природу. И здесь фундаментальную эвристическую роль играли выдвинутые им принцип непрерывности и принцип достаточного основания. В дальнейшем идеи Лейбница привели к созданию математической логики. Они получили свое продолжение и развитие в работах немецкого философа Г. Фреге, о котором в предисловии к русскому изданию было сказано, что именно

[1]Перминов, В.Я. Априорность и реальность исходных представлений математики / В.Я. Перминов // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия, 2010, №4. С. 105.

ему принадлежит «первая в истории науки формальная логическая система».[1]

Попытка показать, что математика выводима из логики, привела Г. Фреге к разработке методов, которые вывели его далеко за пределы аристотелевской силлогистики. Г. Фреге разработал аксиоматическую логику предикатов, основанную на квантифицированных переменных.

Одна из заявленных целей Г. Фреге состояла в том, чтобы выделить подлинно логические принципы вывода, принципы, следуя которым при правильном представлении математического доказательства не возникало бы необходимости обращаться к интуиции. Если и имел бы место интуитивный элемент, то он должен был быть выделен и представлен отдельно, как аксиома; доказательство же должно было быть чисто логическим и без пробелов. Фреге поставил перед собой цель - обосновать точку зрения, что арифметика – это ветвь логики. Данная точка зрения развилась в направление философии математики и стала известна как логицизм: в отличие от геометрии, арифметика не имеет основания в интуиции и не нуждается в нелогических аксиомах. Эта идея была сформулирована в его «Основах арифметики» (Die Grundlagen der Arithmetik, 1884). Позже, в своих «Основных законах арифметики» (Grundgesetze der Arithmetik, 1893), Фреге попытался вывести, используя свой символизм, все законы арифметики из аксиом логики.

Законы логики, по мнению Г. Фреге, подобны законам природы, но законы природы отражают то общее, что есть в естественных процессах, а законы мысли внеприродны, так как они относятся к бытию истины. Мышление представляет собой деятельность человеческого разума, а «разум принадлежит реальности, сущему в той же мере, в которой относятся к реальности все возможности ее существования».[2]

[1] Фреге, Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов / Пер. с нем. Б.В. Бирюкова. М.: Аспект Пресс, 2000. С.8.

[2] Арепьев, Е. И. Перспективы реализма в онтологическом обосновании математики: аргументы к одной интерпретации/ Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2013. № 3 (27). Том 1. [Электронный ресурс]. https://cyberleninka.ru /article/n/perspektivy-realizma-v-

Начало современного периода в отечественной истории математики связывают с открытием Н.И. Лобачевским неевклидовой геометрии в 1826 году (следуя А.Н. Колмогорову).[1] Реальность неевклидовых геометрий была признана в 60-е годы XIX века, после того, как итальянский математик Э. Бельтрами показал, что все свойства геометрии Лобачевского выполняются на вполне конкретных поверхностях, которые можно наглядно представить и изобразить. В дальнейшем А. Пуанкаре и Ф. Клейном были найдены еще более наглядные модели геометрии Лобачевского.[2] В 1854 году Г.Ф.Б. Риман открыл другой класс неевклидовых геометрий (римановы пространства).

На протяжении всего XIX века европейская математика становилась все более абстрактной. К.Ф. Гаусс опубликовал работы по функциям комплексных переменных и по сходимости рядов. Именно К.Ф. Гаусс дал первые доказательства основной теоремы алгебры и квадратичного закона взаимности. Г. Грассман в Германии создал первую версию векторных пространств, У.Р. Гамильтон в Ирландии разработал некоммутативную алгебру. Британский математик Д. Буль разработал алгебру логики, которая теперь называется булевой алгеброй, является отправной точкой математической логики и имеет широкое применение в электротехнике и информатике. О. Коши, Б. Риман и К. Вейерштрасс переработали дифференциальное и интегральное исчисление более строгим образом. Н. Абель и Э. Галуа заложили основу теории групп, на основе которой в дальнейшем получили развитие фундаментальные разделы абстрактной алгебры. В XX веке ученые рассматривали теорию групп как идеальный способ изучения симметрии.

В 1900 году, выступая на Международном конгрессе математиков, Д. Гильберт изложил список из 23 нерешенных проблем математики. Эти

---

ontologicheskom-obosnovanii-matematiki-argumenty-k-odnoy-interpretatsii

[1]Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В. А. Успенского.- М.: Наука, 1991. С. 30.

[2] См. Клини, С. Введение в метаматематику. Пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина; Под. ред. В.А. Успенского. – М.: Изд-во Ин. лит., 1957. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В. А. Успенского.- М.: Наука, 1991.

проблемы, охватывающие многие области математической науки, сформировали центральное направление деятельности для большей части математиков XX века. На сегодняшний день 10 из них уже решены, 7 частично решены, а 2 все еще считаются нерешенными. Остальные 4 сформулированы недостаточно ясно, чтобы можно было говорить об их решении.[1]

В XX веке при решении различных задач имела место работа научных сообществ. Группа французских математиков, в которую входили Жан Дьёдонне и Андре Вейль, публиковавшая свои работы под псевдонимом «Николя Бурбаки»[2], попыталась представить всю известную математику как единое целое, но получившиеся несколько десятков томов оказали противоречивое влияние на математическое образование.

Дифференциальная геометрия, связанная с именами Л. Эйлера и К. Гаусса, вступила в свои права, когда А. Эйнштейн использовал ее в общей теории относительности. Понятие абстрактной структуры само по себе было формально определено, что в дальнейшем привело к теории категорий. Большие успехи были достигнуты в качественном изучении динамических систем, начатом А. Пуанкаре в 1890-х годах.

Вторая половина прошлого столетия ознаменовалась широким внедрением вычислительной техники, что позволило иметь дело со все большими и большими объемами данных, и для этого были разработаны новые области математики: теория вычислимости А. Тьюринга; теория сложности; тест простоты чисел Лукаса – Лехмера; теория рекурсивных функций Р. Петера; теория информации К. Шеннона; оптимизация и другие направления исследований операций, такие, как численный анализ и символьные вычисления.

Таким образом, понимание природы математических объектов, а также критерии истинности математического знания и математических утверждений претерпели значительную трансформацию в системе науч-

---

[1]Болибрух, А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). М., 1999. С. 22–24.

[2] Напр. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 292 с. и др.

ного знания. Рационалистические представления о математических понятиях эволюционируют от античности до наших дней. Преобразование взглядов совершает диалектический круг, возвращаясь к исходным положениям на новом уровне. Трактовка математических истин как приемов землемерия и счета, как сущности мира, космоса, как божественных истин, как эмпирических обобщений и свойств разума, как средства естествознания и способа универсализации языка, к XX столетию вновь возвращается к идее абстрактного выражения наиболее общих свойств и связей действительности. В науке XX в. математика все более стала выступать как эвристическое средство, как то, что позволяет предвидеть путь дальнейшего движения научного поиска, путь, на котором просматриваются возможности будущих открытий законов реального мира. Пифагорейская идея внутренней гармонии из критерия истинности превратилась в один из эвристических принципов.

1.2. Фундаменталистский и социокультурный подходы к обоснованию математики в нашей стране и за рубежом: XX столетие

К концу XX столетия регулярное проведение конференций и семинаров по философии математики в нашей стране повысило исследовательскую активность специалистов. Увеличилось количество научных публикаций, монографий и сборников, и в философии математики проявились два различных, противостоящих друг другу направления, – фундаменталистское и нефундаметналистское, получившее название социокультурного. Конечно же, возникли эти направления несколько раньше, и не в одно время, о чем будет сказано ниже, но их противостояние обнаруживается ближе к концу века.

Под фундаментализмом в философии науки понимают такую эпистемологическую позицию, с которой «…выдвигается идеал обоснованности научного знания и критерий обоснованности знания как критерий его (знания) научности».[1]

Представители фундаменталистского направления философии математики утверждают, например, что математика принципиально едина, что математическая парадигма, включающая в себя объект познания и методы исследования, в основе своей неизменна.

На протяжении длительного времени математика представлялась исследователям наукой, которая свободна от социокультурных ценностей и факторов. Академическая математика, обладающая высоким уровнем абстрактности, считалась упорядоченной системой обоснованного и непротиворечивого знания, которое имеет универсальный характер. Природа математических объектов и понятий априорна, из чего следует онтологическая объективность математики. Математические доказательства, опирающиеся на законы логики, обладают необходимой степенью надежности. Фундаменталистское направление «…подчиняет исследование математики одной целевой установке – выяснению проблемы сущности математики, не зависящей от ее конкретных исторических состояний».[2]

Внимание сторонников фундаментализма сосредоточено на гносеологических вопросах и классической проблематике обоснования математического знания, исследовании природы и сущности математики как таковой. Развитие математики, с этой позиции, представляет собой процесс, устремленный к некоторому заданному идеалу, который сам по себе является исторической необходимостью.

Сторонники социокультурного подхода к математическому познанию утверждают возможность наличия множественности математик, зависимость математической парадигмы от исторических и социальных, общекультурных факторов. Они считают, что при изучении математиче-

[1] Антаков, С.М. Фундаментализм и его отрицания в философии науки (наука как предмет философии) // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Социальные науки, Нижний Новгород, 2007, №1. С. 302.

[2]Барабашев, А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 38.

ских представлений необходимо изучать и ту среду, в которой эти представления возникли и существуют, так как их смысл зависит от контекста, в котором они употребляются. По их мнению, такой подход способствует тому, «чтобы увидеть разнообразие существующих путей развития человеческого мышления».[1]

Классические работы по философии математики, в основном, было бы логично отнести к ее фундаменталистскому направлению. Эти работы связаны, как правило, с проблемами обоснования математического знания, с онтологическими и гносеологическими аспектами математики, и в них не затрагиваются внешние факторы развития математики. Фундаменталистская философия математики занимается прежде всего осмыслением сущности математики, формой существования её объектов, программами обоснования. Она включает в себя философию математики И. Канта, классические программы обоснования математического знания конца XIX – начала XX века, разработанные такими известными учеными, как Б. Рассел, Л.Э. Брауэр, Д. Гильберт (логицизм, интуиционизм, формализм), программу нахождения фундаментальных математических структур, которая была предложена группой французских математиков Н. Бурбаки, более поздние исследования природы математических объектов, изложенные в работах П. Мэдди, У. Куайна, Х. Патнэма и их приверженцев. Не менее широко представлено это направление в отечественной философии науки. К числу его представителей можно отнести таких известных ученых, как А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, В.Я. Перминов, А.Г. Рузавин и другие. С точки зрения представителей данного направления, математика выступает системой знаний, развитие которой «является исторической необходимостью, предопределяющей стремление математики к некоторому заранее заданному идеалу».[2]

В своей книге «Будущее математики: методологические аспекты

[1] Вечтомов, Е. М. Метафизика математики: Монография / Е. М. Вечтомов. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. С. 115.

[2] Барабашев, А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. М.: Изд-во МГУ, 1991.С. 142.

прогнозирования» А.Г. Барабашев замечает, что в западной фундаменталистской философии математики в настоящее время наблюдается «поворот от чисто аналитических концепций сущности математики к тем или иным вариантам эмпирических «синтетических» представлений».[1] Современные западные ученые заняты проблемой реальности математических объектов. Рассматривается вопрос о том, какова онтологическая суть понятия числа, если оно не имеет никаких других свойств, кроме свойства упорядоченности.[2] Фундаменталистское направление имеет достаточно большое число сторонников среди авторитетных ученых, представителей философии математики. Однако уже к концу прошлого столетия число их оппонентов, сторонников социокультурного направления, стало возрастать.

Социокультурное направление философии математики формируется примерно в середине 60-х годов XX века. В.А. Шапошников связывает формирование альтернативы фундаментализму с возникновением и постепенным укреплением позиций постпозитивистской философии науки, стремительным развитием компьютерной техники и цифровых технологий. Все это, по мнению В.А. Шапошникова, приводит к тому, что путь, пройденный философией математики за полвека (1930 – 1970-е годы) сам становится предметом философского исследования. В результате этого исследования «было декларировано появление …альтернативного направления».[3] Исследовательский интерес его представителей нацелен не на изучение оснований математического знания и стандартов математических рассуждений, а на исследование путей развития, «… на постановку и решение проблем выявления концепций развития математики, поиска схем этого развития».[4]

[1] Там же. С. 158.
[2] Курант, Р., Робинсон, Г. Что такое математика? Элемент. очерк идей и методов. Пер. с англ. 2-е изд. М.: Просвещение, 1967. С. 160.
[3] Шапошников В.А. Философия математики в эпоху перемен: поворот к математической практике и ориентация на приложения // История и философия науки в эпоху перемен: сборник научных статей/ Т.1. М.: «Русское общество истории и философии науки», 2018. С. 47 – 49.
[4] Математика и опыт/ Под ред. А.Г. Барабашева. М.: Изд-во МГУ, 2003. С. 28.

В рамках нефундаменталистского направления большое значение придается исследованию процесса развития математики как социокультурного явления, то есть сама «сущность математики здесь предстает как закономерности ее развития».[1] Иными словами, при изучении развития математики подчеркивается необходимость учета всего многообразия социокультурных факторов. Исследования по истории математики показывают, что ее развитие во многих случаях существенно определяется внешним культурным окружением. Попытки дать адекватную картину влияния на этот процесс внешних факторов, имеют место в работах как ведущих отечественных специалистов в данной области, так и зарубежных ученых, работы которых широко публикуются в известных математических изданиях.[2]

Представители фундаменталистского направления философии математики считают, что древнеегипетская и вавилонская математика представляли собой бессистемный набор правил, технологий измерения и вычисления, а также отдельных результатов, связанных между собой случайным образом. Такая совокупность знаний, по их мнению, не является в полной мере систематизированным знанием с логическим выводом и использованием математических объектов.

Представители же социокультурного направления дают совершенно иную оценку генезиса математической науки. Их модель рассматривает развитие математики как динамическое взаимодействие двух основных типов математического знания, которые принципиально отличаются друг от друга, – «практической математики» и «теоретической математики». В свете этой модели математика Древнего Египта и Вавилона представляла

[1] Барабашев, А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 140.
[2] См., например: Hersh, R. The fresh wind in the philosophy of mathematics // Amer. Math. Monthly. 1995. Aug.-Sept. P. 590-591. Francois, K., Van Kerkhove, B. Ethnomathematics and the philoso-phy of mathematics (education). 2010. URL: researchgate.net/publication /228394932_Ethnomathematics_and_the_Philosophy_of_Mathematics_ Education.Bird A. Kuhn and the Historiography of Science. In: Devlin W., Bokulich A. (eds) Kuhn’s Structure of Scientific Revolutions - 50 Years On. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol 311. P. 23-38. Стили в математике: социокультурная философия математики /Под ред. А. Г. Барабашева. СПб.: РХГИ. 1999. 552 с.

собой практически ориентированное знание, существовавшее в виде «рецептов для решения определенных задач».[1] Математические записи тех культур сопутствуют хозяйственным и юридическим документам. При этом передача опыта посредством обучения приводит в дальнейшем к поиску общих методов, т.е. к теоретической математике.

В античном мире преобладает теоретическая линия математики, основанная на логическом доказательстве. Но уже в Средние века вновь доминирует практическая математика, практическое применение результатов которой относилось к задачам, имеющих место не только в астрономии, мореплавании и кораблестроении, но и в хозяйственной деятельности. Однако в средневековой математике возникают и развиваются тенденции алгоритмизации, что ведет к синтезу практических интересов и теоретических традиций. Переход к преобладающему теоретическому способу систематизации математики происходит в Новое время.

В дальнейшем направление математических исследований диктуется преимущественно ее внутренними потребностями. В XVIII в. таким образом разрабатывается математический анализ и его различные приложения. В математике Нового времени преобладает теоретический способ систематизации. Возникает необходимость в новом терминологическом аппарате, новых понятиях, которые дали бы возможность к обобщению математических представлений.

Сторонники фундаменталистского направления представляют математику как определенную систему, внутри которой нет деления на теоретическую и практическую математику, поскольку вся математика представляет собой теоретическую науку. По мнению сторонников фундаменталистского подхода, математическая наука начинается в Древней Греции. Под математической наукой фундаменталисты понимают математику, связанную с идеей доказательства или дедуктивного вывода. При этом математика Нового времени, вобрав в себя все достижения и исключив

[1] Беляев, Е.А., Перминов, В.Я. Философские и методологические проблемы математики / Е.А. Беляев, В.Я. Перминов. М., 1981. С. 10.

ошибки предшествующей математики, становится системой более высокого уровня. В этот период возникают новые теории и разрабатываются новые методы исследования, граница между алгеброй и геометрией становится все более и более размытой, и в результате появляется математика переменных величин.

Нефундаменталистская модель развития представляет современную математику как практически ориентированную науку. В математике усиливается тенденция к практическому способу систематизации. При этом теоретические исследования все больше связываются с проблемами оснований математики.

Таким образом, фундаменталистский взгляд на историю математики представляет развитие математической науки как кумулятивный процесс, – на базе накопления знания и совершенствования методов происходит все более глубокое проникновение в сущность изучаемых явлений.

В западной философии математики одной из первых значительных работ нефундаменталистского направления стала работа И. Лакатоса «Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы».[1] И. Лакатос, видный деятель в области математической логики, исследует в своей книге фазу математического доказательства в форме рассказа о стереометрической теореме, о спорах учеников при разборе правильности возможных ее доказательств. В качестве примера взята история доказательств теоремы Л. Эйлера о соотношении числа граней, вершин и ребер в многогранниках, на которой И. Лакатос показывает общую схему развития математики. Уже во введении он отмечает стремительное развитие метаматематики, в которой математические теории заменены формальными системами, что позволяет сформировать мощный механизм исследования методологических проблем математики. Целью своего этюда Лакатос объявляет вызов математическому формализму и догматизму. В ходе рассуждений, а также в большом количестве подстрочных коммента-

---

[1] Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. Пер. с англ. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.

риев, которые являются органической частью работы, Лакатос показывает «реальную историю» развития математики, «рационально реконструированную» и «дистиллированную».[1] В современной западной философии науки производится поиск моделей развития математической науки как элемента социокультурной системы.

Еще одной из известных работ, в которой дается анализ развития математики, стала работа американского философа Ф. Китчера «Природа математического знания».[2] В ней Ф. Китчер попытался связать проблемы обоснования математики с проблемой научной рациональности. При этом он стремился учитывать различные социокультурные факторы развития математики как научной дисциплины.

Можно утверждать, что представителям нефундаменталистского направления удалось значительно расширить границы философии математики. На современном этапе еще одной важной проблемой и областью рефлексии становится проблема применения математических результатов. Сюда входят, прежде всего, вопросы прикладной математики. Появляются утверждения о том, что наиболее адекватное представление о природе математического знания можно получить, исследуя именно феномен прикладной математики в качестве исходного.[3]

В отечественной философии математики к нефундаменталистскому направлению можно отнести отдельные исследования таких известных ученых, как В.А. Бажанов, А.Г. Барабашев, Б.В. Бирюков, В.Э. Войцехович, М.И. Панов, В.М. Розин, З.А. Сокулер и др. В их работах просматривается стремление найти диалектику в самом процессе развития математики как системы научного знания, а не в ее сущностных характеристиках, рассматриваемых вне связи с другими областями знания. В них отсутствует стремление установить вневременную, не зависящую от исторического контекста сущность математики. М.И. Панов утверждает, что

[1] Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. Пер. с англ. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. С. 11.
[2] Kitcher, Ph. The nature of mathematical knowledge. N.Y., 1984. 368 p.
[3] Maddy, P. Set and numbers / P. Maddy // Nous. - Bioomington, 1981. Vol. 15, № 4. P. 495-511.

математическая наука включена «в общекультурный контекст человеческой деятельности», и предрассудком является мнение о том, что «объективированная интерпретация науки гарантирует, что любое открытие может быть повторено».[1]

А.Г. Барабашев замечает, что нефундаменталистские работы занимают все большее место в литературе по философии математики. Сюда относятся исследования проблем интуиции, проблем сущности математического доказательства как исторически эволюционирующих процессов.

Несмотря на очевидную популярность, социокультурный подход в философии математики остается далеко не бесспорным. Даже убежденные сторонники этого подхода признают, что нет достаточных оснований для допущения культурного релятивизма в области математики. В.В. Целищев полагает, что «признание математики просто человеческой активностью, с точки зрения гуманистической математики, вообще не имеет отношения к философии математики».[2]

Представители же фундаментализма в данном вопросе гораздо более категоричны. Так, Е.М. Вечтомов, выступая как сторонник фундаменталистской философии математики, в своей монографии «Метафизика математики» пишет: «Если фундаментализм отображает подлинную онтологию математики, то нефундаментализм навязывает нам рекламу внематематических декораций, приукрашенных элементами современного дизайна».[3] Рассмотрев основные вехи истории математики, он приходит к выводу, что «другой математики быть не могло».[4]

Весьма категорична также позиция В.Я. Перминова, который критически относится к большинству тезисов антифундаментализма. Он считает, что развитие науки представляет собой «процесс очищения норма-

[1] Панов, М.И. Философия математики XX века (обзор) //Философия в XX веке: в 2-х ч.: Сб. обзоров и рефератов / РАН. ИНИОН. М., 2003. Ч.2. С. 36.
[2] Целищев, В.В. Поиски новой философии математики / В. В. Целищев // Философия науки. 2001. № 3(11). С. 8.
[3] Вечтомов, Е. М. Метафизика математики: Монография / Е. М. Вечтомов. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. С. 116.
[4] Там же. С.118.

тивных предпосылок от всякого рода ценностных и социокультурных аспектов».[1] В другой работе В.Я. Перминов пишет: «Математика очищает себя от ошибок … посредством системности теории».[2] Научная теория, считает он, в процессе своего вызревания в итоге полностью исключает из себя всякое социокультурное и историческое содержание. Это означает, что в конечном счете необходимо полностью отказаться от связи обоснования науки с культурными универсалиями. Зрелая наука базируется на фундаменте, который внеисторичен. В частности, математика фиксирует в своих представлениях порожденные деятельностью структуры мышления, поэтому математическое знание обладает высокой исторической стабильностью. Ничто в математике не доказывает неопределенности ее базовых структур.

Для обоснования математики необходима функциональная позиция, которая выявляла бы априорные формы мышления. «Если бы все человечество потеряло на время память и прервало все исторические эстафеты, то, возродившись к жизни, оно неизбежно бы воспроизвело реальную логику, арифметику, евклидову геометрию и абстрактную онтологию в том же самом виде, ибо эти структуры поддерживаются не в силу традиции, но под давлением функции», – утверждает В.Я. Перминов.[3] Даже в истории математики ученый считает социокультурный подход неприемлемым к изучению ее оснований, поскольку при таком подходе несущественной становится сама преемственность математических структур. При этом В.Я. Перминов никоим образом не считает этот подход излишним или несущественным, так как он позволяет получить объяснение определенного рода событий в истории математики, зависящих от внешних условий и не выводимых из внутренней логики науки. Суть в том, что социокультурный подход «вторичен и сам по себе не может претендовать ни на статус особой философии математики, ни, тем более, на некоторое перспектив-

[1] Перминов, В.Я. Ложные претензии социокультурной философии науки // Стили в математике: социокультурная философия математики /Под ред. А. Г. Барабашева. СПб.: РХГИ. 1999.С. 245.
[2] Перминов, В.Я. Философия и основания математики - М.: Прогресс-Традиция, 2001. С. 27.
[3] Там же. С. 37.

ное направление в философии математики», – считает ученый.[1] Следует, однако, заметить, что у многих современных авторов есть работы как фундаменталистской, так и нефундаменталистской направленности. В последних рассматриваются различные типы взаимодействия философии и математики.

На наш взгляд, наличие различных подходов к решению какой-либо проблемы всегда имеет большой положительный потенциал, поскольку способствует диалектическому процессу развития науки, позволяет значительно расширить ее границы.

Таким образом, споры между сторонниками фундаментализма и антифундаментализма в философии математики продолжаются как в среде западных, так и в среде отечественных ученых. Представители фундаменталистского и нефундаменталистского (социкультурного) подходов в философии математики, по-разному оценивая генезис и эволюцию математического знания, сходятся в признании эвристической роли аномальных этапов (кризисов) в развитии математики.

Как правило, в большинстве научных споров оппоненты остаются при своих мнениях, усиливая свои аргументы и укрепляя идейные позиции. Любой спор является следствием существенных различий в восприятии реальности, различий исследовательских успехов сторон.

1.3. Полемика в современной философско-математической мысли

На протяжении прошлого столетия круг проблем философии математики, как западной, так и отечественной, значительно расширяется. Если изначально она была связана с проблемой обоснования математического знания, то в дальнейшем в перечень ее проблем входят онтологические и гносеологические аспекты осмысления сущности математики, вопросы о природе математических объектов и понятий, природе доказа-

[1]Перминов, В.Я. Ложные претензии социокультурной философии науки // Стили в математике: социокультурная философия математики /Под ред. А. Г. Барабашева. СПб.: РХГИ. 1999. С. 248.

тельства в математике, о соотношении математики и логики, проблема построения «приемлемых онтологических моделей»[1] математических объектов, проблема сущности бесконечности и другие проблемы.

Современная математика существенным образом определяется важными событиями[2], имевшими место в XX веке:

– на первый план выдвигаются исследования в теории функций действительного переменного;

– возникает новая математическая дисциплина – топология;

– происходит смена приоритетов: если в первой половине столетия основным направлением в математике был анализ, то во второй половине интересы математиков стали смещаться в сторону топологии, теории многомерного комплексного анализа и т.д.

В XX веке возрос интерес к проблемам теории вероятностей. В начале века алгебра становится абстрактной наукой, в развитие которой существенный вклад внесла отечественная школа математики (А.Г. Курош и другие). Представители философии математики обращаются к проблемам обоснования математического знания и построения математических теорий.

Философия математики XX столетия занимается двумя основными вопросами: каково значение математических предложений и существуют ли математические объекты, которые не являются абстрактными. Первый вопрос сводится к вопросу интерпретации, к построению семантической теории для языка математики. Дело в том, что различные метафизические представления о природе реальности порождают различные интерпретации математики.

Второй вопрос может быть сформулирован так: какова природа математических объектов? Что такое число? По мнению антиреалистов, такие объекты, как числа, не существуют. Реалисты, в свою очередь, утвер-

---

[1] Яновская, С.А. Методологические проблемы науки. М.: Мысль, 1972. С. 63.
[2] Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В. А. Успенского. М.: Наука, 1991. С. 82–83.

ждают, что существуют и числа, и другие математические объекты. В одних концепциях реализма числа – это ментальные объекты. В других утверждается, что числа существуют вне человеческого сознания, как свойства физического мира. И наконец, известно еще одно направление – математический платонизм, в котором утверждается, что числа являются реальными объектами, но нефизическими и нематериальными. Вопрос о том, существуют ли абстрактные объекты, является одним из древнейших и наиболее спорных вопросов философии. Мнение, что такие вещи действительно существуют, восходит к Платону.

Математический платонизм – это точка зрения, согласно которой (а) существуют абстрактные объекты – объекты, которые полностью вневременны, нефизичны и нементальны, – и (б) существуют истинные математические предложения, которые обеспечивают истинное описание таких объектов.

Среди современных платоников (Р. Пенроуз, Г. Харди) наиболее распространено мнение, что определяющей чертой абстрактного объекта является вневременность. То есть абстрактные объекты не находятся нигде в физической Вселенной, и они также полностью нематериальны, но они всегда существовали и всегда будут существовать. Абстрактные объекты также, согласно платоникам, неизменны и совершенно беспричинны. Поскольку абстрактные объекты не обладают протяженностью в пространстве и не состоят из физической материи, то из этого следует, что они не могут вступать в причинно-следственные отношения с другими объектами. Платоники также утверждают, что математические теоремы дают истинное описание таких объектов.

До определенного времени обсуждался только один вид математических объектов, а именно чисел. Но есть много различных видов математических объектов – функции, множества, векторы, окружности и т.д. – и все это абстрактные объекты. Вообще, по мнению платоников, математика – это изучение природы различных математических структур, которые носят абстрактный характер.

Платонизм существует уже более двух тысячелетий, и на протяжении многих лет он был одним из самых популярных взглядов среди философов математики. В конце XIX века Г. Фреге основывает современную математическую логику, которая считается мощным аргументом в защиту платонизма. В XX веке К. Гедель и У. Куайн выдвинули гипотезы в попытке объяснить, как люди могут приобретать знания об абстрактных объектах.[1]

В течение 1980-х и 90-х годов американские ученые разработали три версии математического платонизма: одну – П. Мэдди, вторую – М. Балагер и Э. Залта, а третью – М. Резник и С. Шапиро.

Согласно П. Мэдди, математика - это наука об абстрактных объектах, которые нефизичны и нематериальны, хотя и расположены в пространстве и времени. Однако она допускает, что некоторые математические объекты являются конкретными, в отличие, в частности, от К. Гёделя, который предполагал, что все математические объекты абстрактны. П. Мэдди предположила, что множества могут быть «причинно-эффективными»[2] и фактически разделяют все причинные и пространственно-временные свойства своих элементов. Так, когда мы видим на столе три чашки, мы также видим набор. Затем мы видим набор из этого набора, и так до бесконечности.

Согласно М. Балагеру и Э. Залте, единственными надежными версиями платонизма являются те, которые утверждают не просто существование абстрактных объектов, но существование как можно большего числа абстрактных объектов. Если это верно, то любая система математических объектов, которая может быть последовательно понята, должна действительно существовать. М. Балагер называл эту точку зрения «полнокровным платонизмом» и утверждал, что только такая точка зрения поз-

---

[1] Gödel, K. What is Cantor’s Continuum Problem? Philosophy of Mathematics, eds. P. Benacerraf & H. Putnam. Cambridge University Press. 1983. P. 470–485. Quine, W. V. O. “Success and Limits of Mathematization,” in his: Theories and Things. Harvard University Press. 1981.

[2] Maddy, P. Set and numbers / P. Maddy // Nous. Bioomington, 1981. Vol. 15, № 4.P. 497.

воляет объяснить получение знаний об абстрактных объектах[1].

Версия платонизма, разработанная М. Резником[2] и С. Шапиро[3], известна как структурализм. Основные идеи ее заключаются в том, что реальные объекты изучения математики – это структуры или паттерны, такие как бесконечные ряды, геометрические пространства и теоретико-множественные иерархии, и что отдельные математические объекты (такие как число) вообще не являются объектами в обычном смысле этого термина. Скорее, это просто позиции в структурах или паттернах.

Паттерн – это не объект в обычном смысле этого слова, это как бы роль, которую могут выполнять разные люди. Как утверждают М. Резник и С. Шапиро, то же самое можно сказать и о математических структурах.[4] Они представляют собой нечто вроде паттернов, состоящих из позиций, которые могут быть заполнены объектами. Число 4, например, является всего лишь четвертой позицией в положительном целочисленном паттерне. Различные объекты могут быть помещены в это положение, но само число вообще не является объектом; это просто положение. Структуралисты иногда формулируют эту идею следующим образом: числа не имеют внутренних свойств и их единственными свойствами являются те, которые они имеют из-за отношений к другим числам в структуре, например, 4 имеет свойство быть между числами 3 и 5.

Другие философы не признают существование абстрактных объектов. Один из вариантов этой точки зрения состоит в утверждении, что существуют такие вещи, как числа и множества (и что математические теоремы дают истинное описание этих вещей), однако отрицается, что эти вещи являются абстрактными объектами. Взгляды такого рода можно назвать реалистическими версиями антиплатонизма. Как и платонизм, они являются версиями математического реализма, потому что в них имеет место утверждение, что математические теоремы дают истинное опи-

---

[1]Balaguer, M. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press, 1998. P. 97.
[2] См. Resnik M. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press.1997. 285 p.
[3] См. Shapiro Stewart. Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000. 272 p.
[4] Resnik, M. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press.1997. P. 57.

сание некоторой части мира. В отличие от реалистических версий атиплатонизма, существует также антиреалистический взгляд, известный как математический номинализм.

Можно выделить две различные версии реалистического антиплатонизма, – психологизм и физикализм. Психологизм – это точка зрения, согласно которой математические теоремы относятся к конкретным ментальным объектам того или иного рода. С этой точки зрения числа, круги и т.д. действительно существуют, но они не существуют независимо от людей, они являются конкретными ментальными объектами – идеями в сознании людей. Психологизм был популярен в конце XIX и начале XX веков, наиболее заметными его сторонниками были Э. Гуссерль, Л. Брауэр и А. Гейтинг. Позже Э. Гуссерль радикально меняет свою точку зрения и становится убежденным антипсихологистом.[1]

Физикализм – это точка зрения, согласно которой математика имеет дело с конкретными физическими объектами того или иного рода. Сторонники этого взгляда согласны с платониками в том, что существуют такие вещи, как числа и множества, и, в отличие от сторонников психологизма, они также согласны в том, что эти вещи существуют независимо от людей и их сознания. Однако физикалисты отличаются от платоников идеей, что математика имеет дело с обычными физическими объектами. Существует несколько различных версий этой точки зрения. Например, можно считать, что геометрические объекты, такие как круги, являются областями реального физического пространства. Точно так же можно утверждать, что наборы представляют собой группы реальных физических объектов. «Две системы могут иметь самые различные конституции и быть функционально изоморфными».[2] Переходя к числам, назовем такую точку зрения, согласно которой их считают физическими свойствами – например, свойством множества физических объектов. Аристотель в

[1] См. Гуссерль, Э. Логические исследования. Т. I: Пролегомены к чистой логике. М.: Академический Проект, 2011. 253 с.
[2] Putnam, H. Mind, Language and Reality // Philosophical Papers. Vol. 2. Cambridge (MA) L.–N. Y., 1984. P. 292.

свое время считал, что свойства существуют в физическом мире, таким образом, по его мнению, краснота существует в конкретных объектах, таких как красные дома и красные яблоки, а не как абстрактный объект вне пространства и времени. Можно сказать, что физикалистский взгляд на математику чем-то напоминает аристотелевскую точку зрения. Одним из тех, кто развивал подобную трактовку, был австралийский философ Д. Армстронг.[1]

Другой подход интерпретации чисел как объектов физического мира состоит в том, чтобы интерпретировать их как утверждения о реальных группах физических объектов, а не о свойствах таких групп.

Математический номинализм – направление в философии математики, сформированное в работах У. Куайна и Н. Гудмена, в котором считается, что такие понятия, как класс и множество, могут быть определены на основе понятия элемента и операций с элементами. Номинализм – это точка зрения, согласно которой математические объекты, такие как числа, множества и круги, на самом деле не существуют.

При этом подходе математические сущности рассматриваются как теоретические конструкции. Но несмотря на то, что реализм апеллирует к сверхчувственной реальности, его сторонники «ищут эмпирическое обоснование и усматривают его наличие в «аргументе незаменимости» (indispensability argument), который связывает факт существования такого рода реальности с фактом незаменимости (или же поразительной эффективности) математики в науке».[2] Этот аргумент известен как аргумент незаменимости Куайна–Патнэма для математического реализма Есть и другие логические конструкции, но эта считается наиболее авторитетной и весомой.

В общем случае аргумент незаменимости – это аргумент, который направлен на установление истинности некоторого утверждения, осно-

---

[1] См. Armstrong, D. M. Nominalism and Realism: Volume 1: Universals and Scientific Realism. Cambridge University Press, 1978 г. 164 p.

[2] Бажанов, В.А. Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. №5. 2014. С. 55.

ванного на незаменимости рассматриваемого утверждения для определенных целей (которые должны быть определены конкретным аргументом). Например, если в качестве цели указано объяснение, то имеет место аргумент объяснительной необходимости. Таким образом, вывод о наилучшем объяснении является частным случаем аргумента о необходимости. Аргумент незаменимости Куайна – Патнэма привлек большое внимание отчасти потому, что многие считают его лучшим аргументом в пользу математического реализма (или платонизма). Представителям математического антиреализма необходимо определить, в чем аргумент Куайна – Патнэма ошибочен. При этом многие сторонники платонизма полагаются на этот аргумент при обосновании своей точки зрения.

Вопрос о том, как понимать «незаменимость» в том или ином контексте, имеет решающее значение для аргументации Куайна – Патнэма. У. Куайн говорит в терминах сущностей, количественно выраженных в канонической форме. Отвечая на вопрос, насколько математика необходима, Х. Патнэм говорит о «теоретико-множественных» потребностях «физики»[1], а У. Куайн утверждает, что высшие достижения теории множеств - это «математическое воссоздание... без онтологических прав»[2], поскольку они не находят физического применения. Можно было бы занять менее ограниченную позицию и утверждать, что высшие достижения теории множеств, хотя и без физических приложений, несут онтологические обязательства в силу того факта, что они имеют приложения в других частях математики.

После У. Куайна натурализм воспринимается как учение о том, что философское обоснование неразрывно связано с научным обоснованием.[3] Под этим У. Куайн подразумевает, что философия не предшествует науке, и не является привилегированной по отношению к ней. Более того, наука, истолкованная таким образом (то есть с философией, как неотъем-

[1]Putnam, H. Mind, Language and Reality // Philosophical Papers. Vol. 2. Cambridge (MA) L.–N. Y., 1984. P. 151.
[2] Quine, W. V. O. “Success and Limits of Mathematization,” in his: Theories and Things. Harvard University Press. 1981.P. 154.
[3] Ibid, P. 151.

лемой частью), воспринимается как полная история мира. Эта доктрина проистекает из признания необходимости научной методологии и признания неоспоримого ее успеха, как способа ответа на фундаментальные вопросы о природе вещей. Как предполагает У. Куайн, источник этого успеха лежит в устойчивом состоянии ума естествоиспытателя, который «никогда не испытывал никаких сомнений, кроме обсуждаемых неопределенностей, внутренних для науки». Для метафизика это означает, что мы обращаемся к нашим лучшим научным теориям, чтобы определить, что существует или, выражаясь точнее, во что мы должны верить, как в существующее. Иными словами, натурализм исключает ненаучные способы определения того, что существует.

В течение первой половины XX века в философии математики в рамках проблемы обоснования математического знания доминировали три направления: логицизм, интуиционизм и формализм.

Логицизм – это точка зрения, согласно которой математические истины в конечном счете являются логическими истинами. Эта идея была введена Г. Фреге. Он поддерживал логицизм в сочетании с платонизмом, но логицизм также согласуется с различными антиплатонистскими взглядами. Развернутая программа логицизма разрабатывалась английскими учеными Б. Расселом и А. Уайтхедом. В настоящее время это направление имеет небольшое число последователей, например, существует неологическая школа, главными сторонниками которой являются британские философы К. Райт и Р. Хейл.

Математический интуиционизм представляет собой течение в философии математики, считающее интуицию единственным источником построения математики и главным критерием строгости её конструкций. Интуиционизм был введен Л. Брауэром, разработан его последователем А. Гейтингом и несколько позже британским философом М. Дамметтом. Л. Брауэр и А. Гейтинг поддерживали интуиционизм в сочетании с психологизмом, и эта точка зрения отчасти согласуется с платонизмом и номинализмом.

Формализм – течение в философии математики, в котором проблема оснований математики сводится к изучению формальных систем. Направление возникло в начале XX века в математической школе Д. Гильберта в ходе его попытки свести в единую систему строгие обоснования различных областей математики.

Другие формалисты, в частности, Р. Карнап, считали математику исследованием формальных систем аксиом. Х. Карри определяет математику как «науку о формальных системах». Формализм Карри отличен от формализма Д. Гильберта. Для Х. Карри математический формализм касается формальной структуры математики, а не формальной системы. С. Шапиро описывает формализм Х. Карри как исходящий из исторического тезиса о том, что по мере развития математики она становится все более и более строгой в своей методологии.[1]

Существует несколько различных версий формализма. Самым простым является метаматематический формализм, который утверждает, что обычные математические предложения, которые воспринимаются нами как числа, на самом деле являются математическими предложениями и теориями.

Эпистемологический аргумент против платонизма основан на идее, что, согласно платонизму, математическое знание – это знание абстрактных объектов, но для людей нет никакого способа получить знания об абстрактных объектах. Аргумент в пользу этого утверждения состоит в следующем:

(1) люди существуют исключительно в пространстве-времени;

(2) если существуют какие-либо абстрактные объекты, то они существуют полностью вне пространства-времени;

(3) поэтому люди никогда не могут получить знания об абстрактных объектах.

[1] Shapiro, Stewart. Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000. 272 p.

У платоников есть три способа ответить на этот аргумент. Они могут отвергнуть (1), они могут отвергнуть (2), или они могут принять (1) и (2) и объяснить, почему утверждение (3) тем не менее ложно.

Платоники, которые отвергают (1), утверждают, что человеческий разум не является полностью физическим и что он способен каким-то образом устанавливать контакт с абстрактными объектами и тем самым получать информацию о таких объектах. Этой стратегии придерживались Платон и К. Гедель. Согласно Платону, у людей есть нематериальные души, и до рождения их души приобретают знания об абстрактных объектах, так что математическое обучение на самом деле является просто процессом припоминания. По К. Геделю, люди получают информацию об абстрактных объектах посредством способности математической интуиции – во многом так же, как информация о физических объектах приобретается через чувственное восприятие.

Платоники, которые отвергают (2), изменяют традиционную платоновскую точку зрения и утверждают, что, хотя абстрактные объекты нефизичны и нематериальны, они все же находятся в пространстве-времени, следовательно, согласно этой точке зрения, знание об абстрактных объектах может быть приобретено через обычные чувственные восприятия. П. Мэдди развила эту идею в связи с наборами.[1] Она утверждала, что наборы физических объектов пространственно-временны и что благодаря этому люди могут воспринимать их, то есть видеть и ощущать на вкус и так далее.

Платоники, которые принимают и (1), и (2), отрицают, что у людей есть какой-то контакт сбора информации с абстрактными объектами способом, предложенным Платоном, К. Геделем и П. Мэдди, но эти платоники полагают, что люди могут приобрести знание об абстрактных объектах. Одна из стратегий, которую применяется в данной ситуации, состоит в утверждении, что люди приобретают знания об абстрактных математи-

[1] Maddy, P. Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990. P. 503.

ческих объектах, строя доказательства истинности своих эмпирических научных теорий. Эти доказательства дают основание верить всей эмпирической науке, а наука включает в себя утверждения о математических объектах. Другой подход, разработанный М. Резником и С. Шапиро, предполагает, что люди могут приобретать знания о математических структурах с помощью способности распознавания образов. Они утверждают, что математические структуры – это не что иное, как паттерны, а люди обладают способностью распознавать паттерны.

Другая позиция основана на утверждении, что все математические объекты, которые могут существовать, действительно существуют. Согласно М. Балагеру, знание об абстрактных объектах может быть получено без помощи какого-либо информационно-передающего контакта с такими объектами. В частности, знание абстрактных объектов может быть получено с помощью следующего двухэтапного метода (который соответствует фактической методологии математиков): во-первых, определить, о каких математических структурах следует теоретизировать, формулируя некоторые аксиомы, характеризующие интересующие структуры, и, во-вторых, вывести факты об этих структурах, доказывая теоремы на основании данных аксиом.[1]

Например, если математики хотят изучить последовательность неотрицательных целых чисел, они могут начать с аксиом, которые определяют структуру этой последовательности. Так, аксиоматически полагаем, что существует уникальное первое число (число 0), что для каждого числа существует единственное последующее число, для каждого ненулевого числа существует единственное предшествующее число и т.д. Затем, исходя из этих аксиом, можно доказать теоремы – например, теорему о том, что существует бесконечно много простых чисел. По утверждению представителей математического платонизма, поступая таким образом, математики приобретают знание об абстрактных объектах без помощи какого-

[1] Balaguer, M. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press, 1998. 217 p.

либо информационного контакта с такими объектами. Иными словами, они утверждают, что математики обнаружили, что в последовательности неотрицательных целых чисел (под которыми просто подразумевается часть или части математической области, которую математики имеют в виду, когда они выбирают стандартные аксиомы арифметики), существует бесконечно много простых чисел. Эта точка зрения предполагает, что все внутренне непротиворечивые системы аксиом могут дать точное описание математической области. Поэтому представители математического платонизма могут утверждать, что, когда математики устанавливают системы аксиом, все, что они делают, – это оговаривают, какая часть математической области имеется в виду. Тогда они могут получить знание, просто доказывая теоремы из заданных аксиом. Сущность данной позиции в том, что любое номиналистическое заключение может быть сделано исключительно силами логики.

У Ф. Китчера математика выглядит как цепь непрерывных концептуальных конструкций.[1] Ключевой конструкцией такого рода становится история математики, из которой извлекаются рациональные принципы. В своей концепции Ф. Китчер значительное место отводит концепции Т. Куна.

Важно также отметить отличие анализируемой дискуссии от распространенного до сих пор в отечественной философии деления философских теорий на «материалистические» и «идеалистические». Нельзя проигнорировать, как нам кажется, следующее соображение. Если, согласно классическому определению, сознание является атрибутом материи, при условии, что мы правильно понимаем значение слова «атрибут» как «неотъемлемое, постоянное, существенное свойство, существенный признак предмета или явления», то вопрос о «первичности» представляется просто некорректно поставленным. Что касается дискуссии «реализм/антиреализм», то любой вариант ответа на вопрос о «первичности»

[1] Kitcher, Ph. The nature of mathematical knowledge. N.Y., 1984. P. 158.

материи или сознания оставляет возможность различных ответов на вопрос о существовании или несуществовании какого-то класса объектов, и поэтому не может считаться исчерпывающим данную проблему.

Платоники утверждают, что такие предложения математических теорий, как «Число 3 является простым» (теорема арифметики) и «Существует бесконечно много трансфинитных кардинальных чисел» (теорема теории множеств) – буквально верны, и что единственное правдоподобное представление о таких предложениях состоит в том, что они касаются абстрактных объектов. Эта общая позиция по отношению к математике восходит к Платону, но первое четкое изложение аргумента в этой форме было дано Г. Фреге (1884). Так, Г. Фреге привел несколько убедительных аргументов против психологизма. Во-первых, психологизм неспособен объяснить истинность предложений, которые касаются всех натуральных чисел, потому что существует бесконечно много натуральных чисел, и ясно, что в человеческом сознании не может быть бесконечно много идей чисел. Во-вторых, психологизм подразумевает, что утверждения об очень больших числах не являются истинными, ибо если никто из нас никогда не думал о каком-то очень большом числе, то психологизм предполагает, что такого числа не существует и, следовательно, ни одно предложение об этом числе не может быть истинным. В-третьих, психологизм превращает математику в раздел психологии и ставит математические истины в зависимость от психологических истин, так что, например, если бы людей не стало, то утверждение «4 больше 2» внезапно стало бы ложным. В-четвертых, психологизм предполагает, что подходящей методологией для математики является методология эмпирической психологии, то есть, если бы психологизм был верен, то правильным способом выяснить, существует ли, скажем, простое число между числами 10 000 000 и 10 000 020, было бы провести эмпирическое исследование среди людей и установить, действительно ли существует идея такого числа в чьем-то сознании; но, конечно, это не может быть правильной методологией для математики.[1]

Платоники не отрицают, что у нас есть идеи математических объектов. Они отрицают, что наши математические утверждения сводятся лишь к этим идеям. Таким образом, спор между платонизмом и психологизмом носит прежде всего семантический характер. Сторонники психологизма согласны с платониками в том, что в предложении «число 3 является простым», «3» функционирует как сингулярный термин. Но они расходятся во мнениях относительно референта этого выражения. Они утверждают, что «3» относится к ментальному объекту, в частности, к идее в наших головах. Именно этот семантический тезис отвергают платоники и должны опровергать приведенные выше аргументы Г. Фреге. Иными словами, они должны показать, что психологическая семантика математического дискурса неверна, потому что она имеет последствия, которые противоречат фактическому использованию математического языка.

Еще один аргумент в пользу превосходства платонистской семантики математического дискурса над психологической семантикой основан на том факте, что в обычном употреблении один из способов сказать, что чего-то не существует, – это сказать, что это существует только в нашем сознании. Сказать, что математические объекты существуют только в нашем сознании, – значит просто сказать, что они не существуют. Ибо сказать, что они (в противоположность нашим представлениям о них) существуют, значит сказать, что они существуют независимо от нас и нашего мышления. У. Куайн убедительно изложил эту точку зрения в связи с концептуалистским взглядом на мифические объекты, такие как Пегас.[2] Человек, который утверждает, что Пегас существует и является идеей в наших головах, никогда не путает Парфенон с идеей Парфенона. Но когда мы переходим от Парфенона к Пегасу, возникает путаница. Таким образом, утверждения о множествах не являются утверждениями о связках

[1] Frege, G. Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 2. Jena, 1902. S. 69 – 80.
[2] Quine, W. V. O. “Success and Limits of Mathematization,” in his: Theories and Things. Harvard University Press. 1981. P. 148

обычных объектов или даже обобщенными утверждениями о таких связках. Это утверждения о множествах, которые являются объектами другого рода.

Еще одна проблема с физикалистскими взглядами, аналогичными взглядам Д. Милля, заключается в том, что они не способны объяснить сам размер бесконечностей, участвующих в теории множеств. Стандартная теория множеств подразумевает не только то, что существуют бесконечно большие множества, но и то, что существует бесконечно много размеров бесконечности, которые становятся все больше и больше без конца, и что на самом деле существуют множества всех этих различных размеров бесконечности. При этом нет правдоподобного способа считать, что эта теория касается физических вещей.

Эти аргументы не опровергают тот вид имманентного реализма, который защищает П. Мэдди.[1] С точки зрения Мэдди, наборы физических объектов расположены в пространстве-времени, там же, где находятся их элементы. Таким образом, если у вас в руке два яйца, то у вас также есть набор, содержащий эти яйца в вашей руке. С точки зрения П. Мэдди, нет проблем с учетом бесконечностей в математике, поскольку, по ее мнению, каждому физическому объекту соответствует бесконечность множеств, существующих в пространстве и времени, там же, где существует данный физический объект. Учитывая это, становится ясно, что, хотя П. Мэдди утверждает, что множества существуют в пространстве-времени, это не может рассматриваться как утверждение, что множества являются физическими объектами. Таким образом, точка зрения П. Мэдди не является физикалистской и может рассматриваться как нестандартная версия платонизма. Для того чтобы платоники утвердили свою точку зрения, им необходимо опровергнуть номиналистические, психологические и физикалистские взгляды.

В современной философии математики под реализмом понимают

[1] Maddy, P. Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990. 204 p. Maddy, P. Set and numbers / P. Maddy // Nous. Bioomington, 1981. Vol. 15, № 4. P. 495–511.

истолкование математических объектов, как имеющих реальную основу до образования математических теорий с принятыми в них понятиями.[1] В противоположность реализму антиреализм связывает математическое исследование с конструированием объектов. При таком подходе понятие математического реализма несколько расширяется, и под него подходят эмпиризм и даже операционализм. Ученые и философы выделяют различные формы и разновидности реализма, которые отличаются между собой тем, какая именно реальность положена в основу рассуждений, фактическая или трансцендентная, объективная или субъективная.

В.А. Бажанов выделяет две формы реализма, традиционный и нетрадиционный, в каждой из которых имеется несколько разновидностей.[2] Сильная версия реализма (традиционный платонизм) признает фактическое существование математических объектов. Эти объекты пребывают в некоторой трансцендентальной реальности, и эта реальность имеет для субъекта восприятия такой же статус, как и «реальность его собственных чувств».[3]

Также В.А. Бажанов обращает внимание на то, что среди физиков, в отличие от работающих математиков, приверженцев традиционного платонизма практически нет, так как для них математика – лишь язык, знаковая система, а не конечная реальность. К нетрадиционному реализму относятся версия П. Мэдди (математические объекты существуют, как и множества физических объектов, но при этом являются абстрактными образованиями), струтуралисткая версия американского ученого М. Резника (математическое знание представляет собой описание и анализ различных вариаций абстрактных структур – паттернов), полнокровный реализм М. Балагуэра, в котором постулируется необходимость существования всех логически мыслимых объектов.

Математическая реальность исторически сформирована как элемент

---

[1] Maddy, P. Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990. P. 15.
[2] Бажанов, В.А. Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. №5. 2014. С.65.
[3] Там же.

культуры, но при этом она является частью внутреннего мира человека, определяющей в значительной степени его познавательные возможности. Проблема признания и развития математического реализма связана с отсутствием приемлемых онтологических моделей для описания математических и логических объектов, структур и истин. Если математические объекты существуют в какой-то реальности, необходимо определиться, где находится эта реальность, каков ее онтологический статус? Иными словами, требуется расширение и уточнение понятия действительности, например, включение в нее понятия возможности.[1]

Анализируя различные концепции математического реализма, можно прийти к выводу, что проблема реальности существования математических объектов в настоящее время не поддается однозначному решению. Каждая концепция имеет как положительные моменты, так и проблемные.

Философский реализм прошлого был связан с проблемой универсалий, и он в основном опирался на здравый смысл. Современный реализм в теории научного познания существенно иной. Изменилась сама система научного знания, изменилось понимание того, каковы возможности и границы наук, каковы возможности человеческого разума и искусственного интеллекта, изменилась сама научная и объективная реальность, с которой человек взаимодействует. «Сегодняшняя реальность многократно сложнее, что требует изменений и в концепции реализма».[2]

С начала нынешнего столетия в европейской философии становится популярным мейнстрим, получивший название «спекулятивного реализма». Представители различных философских направлений сошлись в идее отрицания современной философии, восходящей к Канту. Одной из ключевых работ стала книга французского философа К. Мейясу «После конечности: эссе о необходимости контингентности», которая вышла в 2006

---

[1] Арепьев, Е.И. Природа чисел в свете расширенной трактовки действительности // Российский гуманитарный журнал. 2014. Т. 3. № 4. С. 231.

[2] Яшин, Б.Л. Математический реализм: современные подходы. // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сб. науч. тр. Вып. 9 / гл. ред. Е.И. Арепьев; Курск. гос. ун-т. Курск, 2018.С. 101.

году (на руссом языке книга была издана в 2016 году).[1] Основной тезис работы состоит в том, что современная философия антинаучна и антиреалистична, так как реальность, о которой говорят философы, – это реальность, опосредованная сознанием, и поэтому она не объективна, а глубоко субъективна. Теория К. Мейясу предполагает наличие вещей-в-себе, независимых от человека, и автор книги считает возможным получить абсолютное знание о существовании этих вещей неметафизическим путем. Книга наполнена сложными лексическими конструкциями.

Можно отметить, что в современной философии математики, идеи реализма получили новое развитие и проявились в большом многообразии форм и разновидностей. Интерес к реалистическим концепциям и установкам обусловлен в том числе и тем, что с ними связывают надежды на понимание реальности, которую создают техногенная цивилизация и информационное общество.

Трактовка природы математических объектов и истин, критерии истинности претерпели значительную трансформацию в XX веке. Проблемы, порождающие полемику, как в отечественной, так и в зарубежной философско-математической мысли, – это, прежде всего, вопросы бытийно-познавательного истолкования, разработка моделей онтологических и гносеологических основ математики, – приводят с возникновению многочисленных версий реализма, номинализма, эмпиризма, психологизма и их симбиозов.

[1] Мейясу, К. После конечности: эссе о необходимости контингентности /пер. Л. Медведевой. Екатеринбург. 2015. 196 с.

Глава 2. Формирование и разрешение математических аномалий как эвристический процесс, его историко-философское и методологическое осмысление

2.1. Методология XX столетия о закономерностях развития научного знания

К середине XX столетия проблематика западной философии науки смещается к проблемам динамики, к поиску закономерностей развития научного познания и определению источников и движущих сил этого развития. К наиболее значимым представителям данной области, работающим над этими проблемами, следует отнести Т. Куна, И. Лакатоса, К. Поппера, Г. Башляра и других мыслителей, создавших оригинальные модели развития науки.

Методологической концепцией, которая приобрела широкую известность и была связана с историей науки, стала концепция американского ученого Томаса Куна. Изучая представления о развитии науки, которые имели место в середине прошлого века, Т. Кун приходит к выводу, что они не соответствуют реальным историческим процессам. Постепенно ученый формирует свое оригинальное представление о динамике науки, которое было изложено им в ставшей широко известной книге «Структура научных революций», вышедшей в 1962 г.[1]

Представители логического эмпиризма и позитивистской философии науки, предшествовавшие Куну, считали, что изучение научной теории должно производиться sub specie aeternitatis (с точки зрения вечности), что оценка теории – это вопрос применения законов подтверждения теории к совокупности имеющихся доказательств. Эти законы должны быть показателем того, насколько хорошо теория подтверждается доказательствами. И эти законы, как и законы дедуктивной логики, справедливы

[1] Кун, Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977. 300с.

во все времена. Радикальный отход Куна от такого применения «идеологии естественного права» к науке состоял в предположении, что оценка теории соотносится с определенной традицией решения сложных задач. Кун ввел термин «парадигма» и рассматривал его в двух смыслах. Первый, широкий смысл охватывает общие обязательства научного сообщества, для чего также использовался термин «дисциплинарная матрица». Второй смысл является более узким и относится к самому главному в деятельности сообщества, к примерам решения конкретных задач. Они задают стандарты для последующей науки в этой области. Фрагмент успешной науки, удовлетворительное предложенное решение сложной задачи становится образцом в дальнейшей работе. Следовательно, теоретическая оценка не зависит от контекста, а соотносится с традицией решения научных проблем.[1] Кроме того, сами проблемы возникают из традиции их решения. Ценными являются такие задачи, которые напоминают существующие или возникают из пробелов в существующей традиции. Так, ньютоновская традиция ставит задачу согласования наблюдений планет, спутников и комет с законами Ньютона и измерения величины гравитационной постоянной. Важность традиции проявляется также в феномене несоизмеримости. Т. Кун утверждает, что научная теория может даже не иметь смысла для того, кто работает вне традиции, из которой она исходит. Понимание может быть неполным, поскольку оценка не только закреплена в образцах традиции, но и является важным элементом значений научных терминов.[2]

С логико-эмпирической точки зрения история науки не показывает никаких интересных закономерностей. Эволюция современной науки – это история открытий, опирающихся на уже существующие знания и дополняющих их. Вооруженная общенаучным методом и логикой подтверждения, наука неизбежно будет накапливать открытые истины. Этот про-

---

[1]Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 171.
[2] Кун, Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977. С. 27 – 30.

цесс может быть ускорен благодаря гениальным ученым, оказавшимся в нужном месте в нужное время, при этом процесс открытия (в отличие от обоснования) не может быть полностью методологическим. Но отклонение от накопления знаний встречается редко, в основном из-за (часто внешне обусловленных) отклонений от правильных методов. В некоторых случаях ложная теория может выглядеть первоначально привлекательной, но растущий вес доказательной базы в конечном итоге укажет правильное направление.

На фоне куммулятивистской теории развития науки Т. Кун предлагает циклическую модель с чередующимися фазами нормальной и экстраординарной (революционной) науки. Переход от нормальной к революционной науке, по мнению Т. Куна, протекает через кризис. Научные революции – это периоды истории науки, в которых происходит смена парадигмы. Существование регулярно происходящих, неизбежных кризисов и научных революций указывает на то, что научный прогресс на самом деле не может быть процессом накопления истин. Капризная природа революций предполагает, что ученые не могут применять общие правила подтверждения. Таким образом, идея о том, что существует закономерность научных изменений, закон научного развития, является важной составляющей концепции Т. Куна и представляет собой радикальный разрыв с предшествующей традицией. Здесь также можно отметить параллели между описанием Т. Куном изменений в научных идеях и описанием Г. Гегелем трансформации Абсолютного Духа.[1] Во втором случае тезис порождает вторую идею, антитезис, находящийся в конфликте с первой, конфликт разрешается в синтезе. Точно так же в первом случае внутри парадигмы возникает аномалия, ведущая к разрешению через революционные изменения, где новая парадигма сохраняет элементы своей предшественницы, творчески приспосабливаясь к аномалии, вызвавшей революцию.

---

[1]Bird, A. Kuhn and the Historiography of Science. In: Devlin W., Bokulich A. (eds) Kuhn’s Structure of Scientific Revolutions - 50 Years On. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol 311. P. 29.

В творчестве Гегеля две ветви историзма связаны между собой. То же самое верно и для Куна, хотя и в совершенно ином смысле. У Гегеля идеи исторически обусловлены именно историческим развитием Абсолюта. Иными словами, детерминистский историзм подразумевает консервативный историзм. И в какой-то мере мы можем сказать то же самое о Куне, ибо если в научном мышлении есть радикальные, несоизмеримые разрывы, то оценка научной идеи потребует помещения ее в правильную научную эпоху.

Существует, однако, и другая, более глубокая связь между консервативными и детерминистскими направлениями в историографии науки Т. Куна, работающая в другом направлении, от консервативного к детерминистскому. Ученые могут выявить закономерности в природных явлениях, они также могут объяснить эти закономерности, ссылаясь на лежащие в их основе механизмы или более общие законы. Кеплер определил эллиптическую природу орбит планет и другие закономерности, Ньютон объяснил их своей теорией гравитации. Менделеев открыл периодическую структуру расположения химических элементов, это было объяснено атомной теорией, разработанной Э. Резерфордом, Н. Бором, Дж. Томпсоном и Дж. Чедвиком. Увидеть закономерность в истории науки – это одно, объяснить ее – совсем другое, хотя в действительности эти два процесса не так легко разделить. Детерминистская нить в мышлении Т. Куна состоит в том, что в истории науки существует циклическая закономерность, консервативная нить – в том, что наука развивается, используя основанную на парадигме традицию решения сложных задач.

Нормальная наука существует потому, что в научной области доминирует набор примеров. Эти примеры задают повестку дня для будущих исследований, таких как демонстрация того, как все объекты в Солнечной системе подчиняются законам Ньютона (в ньютоновской парадигме). Эти проблемы не только стали актуальными благодаря принципам Ньютона, но и предоставили средства для своего решения, в первую очередь через примеры использования теории для решения проблем такого рода. Это объясняет существование нормальной науки. Но не все нормальные научные проблемы решаются просто. Например, математики-астрономы XVIII века А.К. Клеро и Ж.Л. Д'Аламбер рассчитали значение периода обращения перигея Луны, который является точкой на орбите Луны, ближайшей к Земле. Они получили значение восемнадцать лет, хотя из наблюдений было известно, что этот период в два раза меньше. Такие очевидные противоречия между наблюдаемыми явлениями и теорией, наряду с другими случаями, когда ученым не удается решить задачи, являются аномалиями. Кун объясняет, что аномалии не рассматриваются как контрдоказательства против теории, лежащей в основе парадигмы.[1] В период нормальной науки неудача в решении задачи приписывается ученому или научному сообществу. Но если накапливаются аномалии, которые становятся все более неразрешимыми, то понимание их причины может начать смещаться от ученых в сторону парадигмы. Именно это и происходит в периоды кризиса. Аномальное движение Луны было достаточно серьезным, чтобы Леонард Эйлер предположил, что закон тяготения Ньютона, возможно, нуждается в корректировке, пока А.К. Клеро не показал, что аномалия была вызвана в основном неточными приближениями, которые использовались. Это можно рассматривать как мини-кризис, который был успешно разрешен в рамках парадигмы. Более серьезным был кризис, возникший в конце XIX века в результате аномальной прецессии перигелия Меркурия, о которой сообщил У. Леверье в 1859 году, и нулевого результата эксперимента Майкельсона – Морли. Поскольку, согласно концепции Куна, нормальная наука требует устоявшейся традиции с надежной парадигмой, кризисы должны преодолеваться. Если они не разрешаются в рамках существующей парадигмы, то эта парадигма должна быть заменена. В частности, она должна быть заменена парадигмой, которая может поддержать традицию решения сложных задач. Именно так происходят научные ре-

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 151.

волюции. Таким образом, консервативная нить в историзме Куна (акцент на традиции решения сложных задач) объясняет детерминистскую нить (закономерную цикличность научных изменений).

Работа Куна послужила стимулом для широкого спектра научных исследований от истории науки до социологии науки, и многие из тех, кто работает в этих областях, считают себя, в некотором роде, наследниками Куна. Кун, тем не менее, самым решительным образом отверг очень авторитетную школу в рамках научных исследований, сильную программу в социологии научного знания (SSK), ведущим представителем которой был Б. Барнс.[1]

Т. Кун отвергает социальный конструктивизм, сделав это в свете своей приверженности историзму. Социальный конструктивизм, который Т. Кун считал противоположным своим собственным идеям, утверждает, что главными факторами, определяющими исход научного явления, такого как кризис, выступают социальные и политические факторы, происходящие вне науки – то, что получило известность как экстерналистская история и социология науки. Согласно этому подходу, триумф теорий Пастера, отвергающих спонтанное зарождение, не является результатом доказательной силы его экспериментов. Скорее этот успех можно объяснить тем, что его идеи были лучше созвучны взглядам консервативной католической иерархии, правившей во Франции. Успех дарвинизма не следует считать следствием аргументов, представленных в «Происхождении видов», но он должен быть объяснен естественной симпатией свободного рынка Великобритании к идее, что улучшение является результатом неограниченной конкуренции. Это примеры внешних объяснений научных изменений, контрастирующих с интерналистскими объяснениями, которые относятся только к целям, ценностям, практикам и установкам внутри науки. Сегодня пространство социальных взаимодействий резко унифицируется, человек оттесняется от национальных традиций.

[1] Barnes, B. Scientific Knowledge and Sociological Theory. London: Routledge and Keagan Paul, 1974. 204 p.

Прогресс в рамках нормальной науки обусловлен парадигмой, набором образцовых решений проблем, которые определяют традицию. Они определяют повестку дня, – определяют, какие проблемы стоит исследовать, и они устанавливают стандарты, по которым оцениваются предлагаемые решения. Концепция Куна не оставляет места для внешних влияний ни в том, ни в другом отношении. Поскольку, подчеркивает Кун, основная часть научной деятельности – это нормальная наука, из этого следует, что по крайней мере большинство научных изменений управляется внутренними для науки факторами.[1]

Т. Кун поддерживает преимущественно (но не исключительно) интерналистский подход. Он говорит, что «... окружающая интеллектуальная среда воздействует на теоретическую структуру науки только в той мере, в какой она может быть релевантна конкретным техническим проблемам, с которыми сталкиваются практикующие в этой области», и продолжает критиковать историков, которые игнорируют этот факт. Кун признает, что история науки может быть ограничена исключительным интернализмом, но «это ограничение, … не всегда должно считаться недостатком, поскольку зрелые науки, как правило, более изолированы от внешних воздействий, по крайней мере, идей, чем другие творческие области». Кун говорит, что сроки научного прогресса могут быть обусловлены внешними факторами хотя бы потому, что преобладающие экономические условия будут определять количество ресурсов, вкладываемых в исследования. Кун также предполагает, что, поскольку различные научные дисциплины взаимодействуют, может иметь место кумулятивный эффект от внешних факторов на эволюцию науки. Прогресс в технологии, несомненно, влияет на способность науки к прогрессу, однако это не предполагает, что внешние воздействия регулярно влияют на результат научного исследования или научной дискуссии. Например, говоря о кризисе в астрономии Птолемея, предшествовавшем коперниканской рево-

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 15.

люции, Кун утверждает, что одним из его компонентов было «социальное давление на реформу календаря, давление, которое сделало загадку прецессии особенно актуальной».[1] Далее, говоря о научном кризисе, он утверждает, что «в зрелой науке, – а астрономия стала таковой в древности, – внешние факторы, подобные приведенным выше, являются принципиально важными при определении стадий упадка. Они позволяют также легко распознать упадок нормальной науки и определить область, в которой этот упадок наметился впервые».[2] Таким образом, хотя внешние факторы могут влиять на то, как происходит данное событие, остается фактом и то, что именно внутренние факторы объясняют, почему это вообще могло произойти.

Даже если нормальная наука и кризис могут быть объяснены чисто внутренними причинами, возможно, что экстернализм будет справедливым для описания Куном революционной науки? Отдельные ученые принимают новую парадигму по самым разным причинам и обычно сразу по нескольким. Некоторые из этих причин лежат вообще за пределами видимой сферы науки. Другие могут зависеть от особенностей биографии личности. Даже национальность или предшествующая репутация новатора и его учителей могут иногда играть значительную роль.

Но не следует переоценивать роль экстернализма даже в этом случае. Как говорит Кун, лишь некоторые причины, по которым человек принимает ту или иную парадигму, могут лежать вне науки. Другие же причины не лежат вне науки. Отношение к личности ученого может определять степень принятия его идей другими учеными. Или на отношение ученого к идее может повлиять тот факт, что он обучался и работал в лаборатории, где разрабатывались такие идеи, или то, что работа над этой теорией предлагает лучшие перспективы. Но, опять-таки, неясно, являются ли эти соображения внешними по отношению к практике науки, по

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 85.
[2] Кун, Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977. С. 100.

крайней мере в том смысле, который противоречит главному интерналистскому утверждению, важному для Куна, что именно требование решения проблем в подавляющем большинстве случаев определяет, какие идеи разрабатываются и принимаются. По мнению Куна, «вероятно, наиболее распространенным утверждением, выдвигаемым сторонниками новой парадигмы, является то, что они могут решить проблемы, приведшие старую парадигму к кризису. Когда это может быть сделано на законных основаниях, это утверждение часто является наиболее эффективным из возможных».[1] Самый эффективный способ продвижения новой парадигмы – показать, что она решает те проблемы, о которых было сказано выше. Далее Кун указывает, что это не всегда возможно. Действительно, новая парадигма-кандидат может вообще не помочь в решении проблем, вызывающих кризис. Кун также подробно обсуждает характеристику революций и важность новой парадигмы, являющейся плодотворной основой для новых исследований по решению проблем.

Однако во время революционной науки можно было бы подумать, что не существует традиции решения проблем, которая играла бы определяющую роль. Но это неверное толкование Куна, основанное на идее, что революции – это полный и радикальный разрыв с прошлым. Кун, возможно, и преувеличил разницу между нормальной и революционной наукой, но он придает большое значение прогрессу и непрерывности науки через революции. Последняя глава «Структуры научных революций» называется «Прогресс через революции». Предпоследняя глава, «Разрешение революций», описывает ограничения, наложенные на новую парадигму прошлым успехом ее предшественницы в решении сложных задач. Такие ограничения означают, что в революционной науке существует значительная преемственность. С точки зрения дебатов об интернализме и экстернализме между нормальной и революционной наукой больше общего, чем различий. Как в нормальной, так и в революционной

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 251.

науке главным двигателем прогресса является научное решение проблем. В нормальной науке потребность в решении проблем удовлетворяется парадигмой. Во время экстраординарной науки потребность остается, но теперь она должна быть удовлетворена путем поиска новой парадигмы. Результат определяется эффективностью предлагаемой парадигмы для решения проблем. Однако Кун подчеркивает, что есть место рациональным разногласиям относительно способности решения проблем предлагаемой новой парадигмы по сравнению со старой или конкурирующей. Таким образом, традиция решения проблем сохраняет свою силу во время революционной науки, хотя и не так прямолинейно, как во время нормальной науки.

Сторонники новой парадигмы в большинстве случаев должны быть в состоянии показать, что она решает существенную часть наиболее значительных аномалий, которые окружают старую парадигму, сохраняя при этом основную часть способности решать задачи своей предшественницы. Поскольку найти инновационное решение, которое достигнет этого, нелегко, большинство эпизодов в революционной науке будет предоставлять очень мало вариантов, как правило, будет только одно революционное предложение, чтобы бросить вызов старой парадигме. Учитывая бесконечный диапазон вариантов, которые может иметь ученый в отношении данного предмета, все, кроме небольшой части, прямо исключаются факторами, внутренними для науки, даже во время экстраординарной науки.

Конечно, это оставляет некоторое пространство для внешних факторов, влияющих на исход научной революции. Тем не менее вряд ли Кун считал, что такие факторы играют определяющую роль. Тот факт, что есть место рациональным разногласиям, не означает, что мнение какого-либо отдельного ученого, не говоря уже о взглядах сообщества в целом, должно быть поколеблено чем-то другим. Это означает, что революционный период науки будет гораздо более длительным. В рамках нормальной науки могут возникать споры, но обычно их можно разрешить, используя ресурсы парадигмы.

С другой стороны, в революционной науке есть некоторые конфликты с существующими стандартами (или, по крайней мере, убеждениями), и из-за этого потенциал предполагаемого нового открытия для поддержки плодотворной программы исследований неясен, особенно когда мы должны отказаться от существующей традиции. Таким образом, существует много возможностей для расхождения во мнениях относительно того, следует ли принять новую точку зрения или нет. Биографические факторы, как говорит Кун, могут играть определенную роль в определении того, как реагируют отдельные исследователи.[1] Старшие ученые будут иметь престиж, опыт, исследовательские программы и лаборатории, вложенные в устоявшийся подход, в то время как молодые ученые будут видеть, что новый взгляд предлагает им возможности для более быстрого продвижения, чем они могли бы иметь в противном случае. Но такой простор для разногласий и влияния профессиональных соображений не может сохраняться вечно. Со временем способность нового взгляда решать задачи превратится из потенциальной в действительную, и станет возможным более прямое сравнение старого и нового. Хотя не может быть определенного момента, в котором становится иррациональным придерживаться той или иной точки зрения, это не означает, что разумно придерживаться любой точки зрения бесконечно. Хотя можно найти ученых, которые продолжали верить в электромагнитный эфир в 1920-х годах, большинство из физиков-теоретиков приняли специальную теорию относительности Эйнштейна, созданную в 1905 году. Различие между нормальной и экстраординарной наукой не является различием между фазами, когда внутренние или внешние факторы являются решающими.

Другая причина считать, что внешние факторы должны быть существенными, заключается в том, что вопросы, над которыми работают уче-

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 151.

ные, очень часто определяются материальными потребностями общества и государства. Ф. Бэкон в «Новом органоне» видит научное предприятие, которое ведет к экономическому процветанию, и поэтому можно было бы ожидать, что такая наука будет заниматься вопросами, непосредственно связанными с проблемами, возникающими в социальной и экономической сфере. Можно было бы подумать об усилиях, предпринятых астрономами для решения проблем в этом ключе. Учитывая настойчивость Куна в изоляции зрелой науки от внешних источников проблем, неудивительно, что Кун проводит явное различие между наукой и технологией. Технология действительно отвечает внешним требованиям, но наука – нет. Конечно, это может быть просто определяющим различием, но Кун дает основание думать, что это не так. Ибо, утверждает он, наука и техника исторически были различными сферами деятельности. Только в середине XIX века видение Ф. Бэкона начало реализовываться, и знания, полученные учеными, начали вносить технологические изменения в общество. Конечно, изоляция науки от техники не гарантирована, и можно задаться вопросом, находится ли современная наука в ином положении. Требования правительств к научным исследованиям, направленным на решение внешних проблем, могут привести к стиранию различий между наукой и технологией вплоть до полного уничтожения. Какова бы ни была истина о практике науки сегодня, взгляд Куна на различие между наукой и техникой согласуется с различием источника проблем, – внутренних и внешних, соответственно, – которые мотивируют интеллектуальную деятельность в каждой из них.

Поскольку концепция Куна переходит от существования традиций (консерватизм) к модели нормальной науки и революции (детерминизм), акцент Куна на релятивизме несколько сильнее, чем у Гегеля. В то время как экстернализм ведет к релятивизму (или скептицизму), обратное не имеет места – релятивизм не обязательно ведет к экстернализму. Действительно, объективисты, то есть те, кто считает, что наука имеет целью раскрытие фактов о независимом мире, будут интерналистами. Но из этого вовсе не следует, что все интерналисты должны быть объективистами. Интернализм дает место как объективистам, так и релятивистам, которые считают, что детерминанты научных изменений заключены в самой науке. И именно таким интерналистом можно считать Т. Куна. Согласно его позиции, если бы экстернализм был истинным, так что вненаучные факторы были бы главными движущими силами научных изменений, то тогда не было бы никаких оснований предполагать, что в истории этих изменений будут какие-либо закономерности. Вместо этого можно было бы ожидать, что история науки продемонстрирует тот же хаос и ту же случайность, которые мы находим в других областях человеческой деятельности.

Экстернализм и детерминистский историзм в науке можно было бы согласовать, если бы закономерности в истории науки отражали более широкие закономерности в истории, которые пронизывают как социально-политическую, так и научную сферы.[1] Законы научного развития были бы проявлениями более широкой историцистской истины.

Историзм Куна вносит важный вклад в достижение его философских целей. Философской целью Куна был логический эмпиризм. Логические эмпирики, трактуемые достаточно широко, включая Поппера, задались целью дать нормативные объяснения изменений теории. История науки может быть использована для проверки этих нормативных объяснений – исходя из предположения, что ученые обычно рассуждают так, как они должны рассуждать. Последнее предположение важно, поскольку без него нормативная теория могла бы быть теорией о том, как ученые должны изменить свои нормы рассуждения, чтобы улучшить их. В этом свете можно увидеть философию науки Ф. Бэкона.

Как бы то ни было, логические эмпиристы полагали, что ученые рассуждают правильно в общем и целом, поэтому их исследования были

[1] Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. P. 251.

направлены на то, чтобы определить структуру и сущность самого процесса рассуждения. Поппер не только считал, что ученые должны отвергать фальсифицированные теории, но и утверждал, что они действительно отвергают такие теории. Таким образом, точка зрения Поппера сама столкнулась бы с фальсификацией, если бы история науки могла показать, что ученые регулярно придерживаются своих теорий перед лицом явно противоречивых доказательств. Именно это Т. Кун стремится показать с позиции консервативной составляющей своего историзма, согласно которому нормальная наука управляется традицией решения сложных задач. Как уже было сказано, по мнению Куна, ученые не отказываются от традиции перед лицом аномалии.[1] Скорее аномалия будет просто еще одной сложной задачей, которую нужно решить. Если ученый берется за такую задачу, но не может ее решить, то эта неудача объясняется ограниченностью ученого, а не традицией.

Несколько иначе обстоит дело с индуктивистским направлением логического эмпиризма. Здесь целью Куна является представление о науке, как о накоплении истинных убеждений, приобретаемых путем многократного применения научного метода, например, некоторой формы индуктивной логики. Такая точка зрения согласуется с существованием нормальной науки. Именно революционная наука создает проблему для логического эмпиризма, так как она представляет собой не что иное, как такой период существования науки, который содержит эпизоды, когда отвергаются устоявшиеся убеждения. Однако, поскольку такие эпизоды, по терминологии Куна, «экстраординарны», есть место для дебатов относительно их доказательной ценности против логической эмпирической картины, поскольку их относительная редкость позволит логическому эмпиристу рассматривать их как исключения, а в некоторых случаях как особенности незрелой науки и т.д. Именно здесь становится актуальной детерминистская составляющая историзма Т. Куна.

[1]Клайн, М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. С. 151.

Сам Т. Кун отвергает общепринятые допущения логического эмпиризма о том, что целью науки является истина и что научная рациональность состоит в применении некоторой логики к соотношению между теорией и прямыми утверждениями относительно опыта ученого. По утверждению американского исследователя А. Бёрда, «концепция смены парадигм Куна состоит в том, что целью науки является решение головоломок, а научная рациональность заключается в сопоставлении предлагаемых решений головоломок с их образцовыми решениями».[1] Точка зрения Куна не покажется столь радикальной, если учесть, что большая часть человеческого познания происходит через распознавание образов. Однако в его собственном историческом контексте это предложение было радикальным и воспринималось как более экстремальное, чем следовало бы, поскольку оно воспринималось как форма иррационализма в отношении науки. Если взглянуть на это в таком свете, то становится понятным, почему как оппоненты, так и сторонники Т. Куна считали, что Кун формулирует концепцию науки, в которой ученые и их идеи, не ограниченные рациональностью, подчинены социальным силам.

Кун хотел доказать свое переосмысленное понимание научной рациональности именно тем, что он указывал на модель восприятия истории науки, которая объясняется этим переосмыслением рациональности лучше, чем старой концепцией.[2] Таким образом, именно консервативная нить его историзма поддерживает эту переосмысленную рациональность. В то же время рациональность науки в соответствии с любой концепцией требует детерминизма. Значительный экстерналистский компонент в науке подорвал бы детерминистскую нить историзма Т. Куна, и поэтому он противоречит его философским целям.

Концепция научно-исследовательских программ И. Лакатоса возникает как попытка установления таких механизмов, которые адекватно

[1] Bird, A. Kuhn and the Historiography of Science. In: Devlin W., Bokulich A. (eds) Kuhn’s Structure of Scientific Revolutions - 50 Years On. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol 311.P. 14 (36).
[2]Baker, A. Indexing and mathematical explanations / A. Baker, M. Colyvan // Philosophia Mathematica. 2011. Vol. 9. P. 325.

описывали бы и период «нормальной науки», и смену парадигм. И. Лакатос считал, что в ходе развития науки в ней формируются не просто отдельные научные теории, а более сложные конструкции – исследовательские программы. «У всех исследовательских программ есть «твердое ядро», «защитный пояс», «негативная эвристика», «позитивная эвристика».[1]

Защитный пояс исследовательской программы «должен выдержать главный удар со стороны проверок, защищая таким образом окостеневшее ядро, он должен приспосабливаться, переделываться или даже полностью заменяться, если этого требуют интересы обороны».[2] Развитие науки И. Лакатос, в отличие от Т. Куна, представляет не как чередование научных парадигм, а как историю рождения, жизни и гибели исследовательских программ. Если исследовательская программа может объяснить больше, чем конкурирующая, то она вытесняет ее. И. Лакатос считает, что безусловно необходимо сохранять «жесткое ядро» научно-исследовательской программы, в то время как происходит «прогрессивный сдвиг» проблем. Как считает И. Лакатос, главным источником развития науки является конкуренция исследовательских программ. И. Лакатос видел себя продолжателем идей Поппера, которые со временем менялись и интерпретировались многими противоречиво.

Теория И. Лакатоса не является «методологической» в смысле утверждения универсальных методологических требований, которым должны быть подчинены все научные исследования. Для И. Лакатоса принципиально то, что необходимо продолжать разрабатывать программы даже тогда, когда стало понятно, что она не может быть полностью истинной. Программа не может быть законно «фальсифицирована», согласно И. Лакатосу, пока она не будет заменена лучшей, то есть более прогрессивной, исследовательской программой. Это то, что происходит в исторические периоды, которые Т. Кун обозначил как научные револю-

[1] Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. Пер. с англ. И.Н. Веселовского. – М.: Наука, 1967. С. 47.

[2] Лакатос, И. Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. М.: Медиум, 1995. С. 80.

ции, и то, что делает их рациональными, а не просто скачкообразными переходами.

Таким образом, в методологии науки XX столетия история науки представляется как единый, закономерно обусловленный процесс смены идей, принципов, парадигм, понятий, теорий и методов научного исследования. Наука развивается на основе научных революций, но кумулятивизм также имеет место в периоды нормальной науки. Аномальные этапы в ходе развития математики, как и в естествознании, приводят к возникновению новых математических теорий, новых направлений, концепций, расширению структуры, принятию новых парадигмальных установок.

2.2. Кризис в развитии математики как предпосылка научных открытий

Т. Кун в своей книге «Структура научных революций» рассматривает кризис в науке как явление, порождающее скачок к появлению новой теории. В развитии математики можно выделить как минимум три ярко выраженных кризиса. Первым кризисом считают открытие несоизмеримости отрезков в последние два десятилетия V в. до н.э. Второй кризис имел место в XVII –XVIII в. Это проблема вычисления бесконечно малых величин. Третий кризис возник на рубеже XIX – XX веков и был вызван парадоксами в теории множеств.

А.Н. Колмогоров связывает первый кризис с формированием элементарной математики, второй – с формированием высшей математики, третий – с формированием современной математики.[1]

Анализируя эти кризисы, Н.Н. Бурова пишет: «Общей причиной всех кризисов является, на наш взгляд, то, что математики не могли справиться с философскими и логическими проблемами, возникающими каж-

[1] Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В. А. Успенского. М.: Наука, 1991. С. 18.

дый раз в связи с открытием нового аспекта, нового содержания в понятии бесконечности».[1]

Известно, что математика изучает нематериальные объекты или отношения – числа, множества, линии и тому подобное. Существует ряд ключевых вопросов, связанных с особенностями математического знания. Что позволяет математикам быть уверенными в истинности математических теорий? Почему математика утверждает именно то, что она утверждает и почему она подходит для описания физической вселенной? Следует признать, что, например, только некоторые системы геометрии описывают Вселенную, которую мы наблюдаем. При этом другие геометрии не являются ложными просто потому, что они не описывают ничего физически реального, или, вернее говоря, мы пока не обнаружили областей материальной действительности, которые они описывают. Система математических отношений считается действительной или истинной, если она согласуется сама с собой, то есть если она работает на своих собственных условиях: она не обязательно должна соответствовать чему-то в изученном нами мире. В математике правильность оценивается по чисто математическим стандартам, а не по экспериментальным стандартам физической науки.

Исторически первой основой математики был здравый смысл, арифметические и геометрические очевидности, неизменно подтверждающиеся в опыте. Поэтому самыми ранними формами математики были счет, или натуральные числа 1, 2, 3…, связанные с ними операции сложения, вычитания и др., и евклидова геометрия, по настоящее время широко используемая в повседневной жизни, технике и большинстве наук.

Однако по мере того, как в последние столетия математика становится все более абстрактной и сложной, математики и философы начинают подвергать сомнению саму природу математики. Как можно узнать, что данная математическая система утверждений является истинной, что

[1] Бурова, И.Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. М., Наука, 1976. С. 15.

бы ни означали ее термины? Попытки ответить на этот вопрос, обнаружить метатеоретическую основу для объяснения и понимания математических истин, породили область исследований, называемую «основания математики» и изучающую природу математики, ее методы, использование различных теоретических инструментов, в самой математике и других областях знания.[1]

Вопросы, с которых начинается исследование основ математики обращены к природе исходных идей и истин, порождающих другие идеи и утверждения. Что такое математические объекты – числа, переменные, матрицы, уравнения? Как мы получаем знания о них, и на каком основании мы верим, что это истинное знание? Что такое доказательство? Как установить, что математическое утверждение доказуемо? Теория, которая дает ответы на такие вопросы, т.е. метатеория, должна быть способна объяснить большую часть, а предпочтительно всю математику, отталкиваясь от малого числа базовых допущений и принципов.

Цель оснований математики состоит в построении всех разделов этой науки таким образом, чтобы в ее фундаменте лежали исходные простые понятия, допущения и принципы, а все остальные положения выводились из них. Здесь опять возникает вопрос, почему одни фундаментальные понятия принимаются раньше других? Инструменты метаматематики – это в значительной мере инструменты математической логики, которая, одновременно, выступает самостоятельным разделом метаматематики.

Проблема надежного обоснования математики особенно остро встала в начале XX века в связи с открытием противоречий в канторовской теории множеств, этот переворот в математическом мышлении известен сегодня как фундаментальный кризис. Но математика за свою долгую историю знала и другие фундаментальные кризисы, связанные с новыми от-

[1] Арепьев, Е. И. Перспективы реализма в онтологическом обосновании математики: аргументы к одной интерпретации/ Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2013. № 3 (27). Том 1. [Электронный ресурс]. https://cyberleninka.ru /article/n/perspektivy-realizma-v-ontologicheskom-obosnovanii-matematiki-argumenty-k-odnoy-interpretatsii

крытиями или изобретениями, которые ставили под сомнение то, что раньше считалось незыблемой основой математического мышления.

Открытие иррациональных чисел древнегреческими математиками, по всей видимости, вызвало первый фундаментальный кризис. Около 500 года до нашей эры Гиппас из Метапонта, ученик Пифагора, представил геометрическое доказательство того, что длина диагонали единичного квадрата является иррациональным числом – то есть числом, которое не может быть выражено как целое число или как отношение двух целых чисел. Есть версия, что Пифагор открыл этот факт раньше, но держал его в секрете, однако многие подобные истории обладают сомнительной достоверностью. Пифагор верил, что все вещи суть числа, то есть числа являются основой всей реальности, и существование числа, которое не может быть выражено как отношение двух целых чисел, в значительной мере обеспокоило его. Когда Гиппас раскрыл это тайное знание пифагорейцев «недостойным», его братья, согласно легенде, изгнали его из пифагорейского союза, и вскоре Гиппас погиб в море как наказанный божеством.[1]

Кризис в математике середины XIX век касался открытия неевклидовых геометрий. Как известно, в своей книге «Начала» греческий математик Евклид (325 – 265 гг. до н.э.) разработал основы геометрии, предложив аксиоматическую систему, представлявшую собой ограниченное число основных допущений, аксиом, из которых, по его мнению, можно вывести все другие истинные геометрические положения. Его система основывалась на пяти аксиомах – положениях, считавшихся самоочевидными, которые, по его мнению, нельзя было вывести из более простых. Одна из аксиом, пятая, казалась не столь самоочевидной, как остальные. Это постулат о параллельности, который гласит, что если прямая пересекает две другие прямые, образуя два внутренних угла (углы, обращенные друг к другу) на одной стороне, сумма которых меньше двух прямых углов, то две линии, если они бесконечно растянуты, должны пересечься на

[1] Чанышев, А.Н. Италийская философия. М.: Издательство Московского государственного университета, 1975. С. 56–57.

этой стороне (в современной трактовке – через точку вне данной прямой на плоскости можно провести единственную прямую, параллельную данной). В евклидовой геометрии предполагается, что на другой стороне две прямые будут расходиться, то есть удаляться все дальше и дальше друг от друга и никогда не пересекутся. Или, если сумма углов в точности равна двум прямым, то линии параллельны и никогда не пересекаются по обе стороны. В пятом постулате привлекается понятие бесконечности. Он утверждает возможность пересечения, которое может произойти на бесконечном расстоянии и поэтому не может наблюдаться во всех случаях. По этой причине пятый постулат никогда не рассматривался, даже самим Евклидом, как столь же самоочевидный, как и другие.

Из этих соображений возникает знаменитая проблема зависимости пятого постулата, то есть предположение, что пятый постулат Евклида – это не аксиома, а теорема, которая может быть доказана на основе других четырех аксиом, считавшихся самоочевидными. История математики знает множество попыток доказать, что пятый постулат является теоремой, но все они потерпели неудачу. Наконец, в XIX веке было доказано, что не только пять исходных аксиом образуют логически непротиворечивую систему, – евклидову геометрию, – но и первые четыре аксиомы плюс утверждение, которое противоречит пятому постулату, могут образовать логически непротиворечивую систему, – неевклидову геометрию. Таким образом выяснилось, что пятый постулат независим от предыдущих четырех постулатов.

Над созданием новой системы работали и немецкий математик Карл Гаусс, и венгр Янош Бойяи, но первопроходцем стал Николай Иванович Лобачевский, который в 1826 г. представил доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», в котором были изложены начала новой геометрии.

Открытие возможности неевклидовой геометрии, противоречащей человеческой интуиции (например, в неевклидовой геометрии кратчайшее расстояние между двумя точками не может быть прямой линией), уменьшило доверие математиков к интуиции, – чувству правильности или очевидности, – как фундаменту математического знания и, тем самым, способствовало изучению математики с использованием формальной логики.[1] Именно логика показала, что геометрия, отличная от евклидовой, которую ученые и математики считали описывающей реальное пространство, возможна. В результате больше внимания стало уделяться изучению свойств различных аксиоматических систем, что породило множество новых геометрий.[2]

До этого времени евклидовой геометрии придавался особый статус среди математических дисциплин, поскольку считалось, что она непосредственно продиктована интуицией, основанной на пространственном опыте. По этой причине понятия в математическом анализе получали геометрическую интерпретацию. Но в XIX веке работы многих математиков, в том числе немецкого ученого Карла Вейерштрасса, показали, что такие понятия, как предел, интеграл и производная, можно интерпретировать в терминах утверждений о действительных числах, а не геометрически. Поскольку рациональные числа, как известно, представимы в виде пар натуральных чисел, оставалась задача объяснить, что такое натуральные числа. Для некоторых этот вопрос был просто неразрешим: натуральные числа были фундаментальными, не поддающимися дальнейшей редукции. Таково было мнение, например, Леопольда Кронекера, которому приписывается утверждение о том, что «Бог создал целые числа, все остальное – дело рук человека».[3] Некоторые другие ученые, такие как немецкий математик Рихард Дедекинд и немецкий математик и философ Готлоб Фреге, пытались найти возможность дальнейшей редукции с помощью логики.

[1] См. Перминов, В. Я. Философские и методологические проблемы математики // Издательство Московского Университета, 1981. С. 48-69.
[2] Асмус, В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике, 2-е изд., М.: «Мысль», 1965. С. 262.
[3]Клайн, М. Математика. Утрата определенности: пер. с англ. / под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. М.: Мир, 1984. С. 269.

Логика была частью философии с момента ее создания Аристотелем (IV в. до н. э.) вплоть до XIX века, когда, благодаря разработке неевклидовых геометрий, открылись огромные возможности логического мышления. В 1901 году британский философ Бертран Рассел обнаружил противоречие в логической системе Готлоба Фреге, который пытался показать, что вся математика может быть сведена к логике.

Развитие логики, осуществленное Г. Фреге, оказало большое влияние не только на основы математических исследований, но и на математику и философию в целом. В 1879 году Г. Фреге опубликовал работу под названием «Исчисление понятий» (Begriffschrift). Эта работа, в которой ученый стремился описать то, что, по его мнению, являлось «необходимыми законами мышления», обычно рассматривается как рождение современной математической логики.[1] У Г. Фреге логика играла ту же роль, что микроскоп для научного исследования: это был более утонченный, более точный способ видения. При изучении фундаментальных свойств математики нельзя пользоваться естественным языком: он слишком неточен. Поэтому Г. Фреге изобрел искусственный язык, новую идеографию, – систему знаков, обозначающих идеи, – с целью строгого описания логических понятий. Он надеялся избежать недостатков естественных языков, таких как неопределенность и двусмысленность.

В 1884 году Г. Фреге опубликовал «Основоположения арифметики» с целью показать, что арифметика, считавшаяся им в то время наиболее фундаментальной частью математики, основана только на логике, что арифметические истины не нуждаются в поддержке со стороны эмпирических фактов, и что математические интуиции не нуждаются в эмпирическом подтверждении. Его тезис о том, что арифметику можно свести к логике, стал предпосылкой одной из программ обоснования математики – логицизма. В этом тезисе утверждалось, что все вещи, о которых говорит арифметика натуральных чисел, можно рассматривать как чисто логиче-

---

[1] Бурбаки, Н. Очерки по истории математики // пер. с франц. И.Г. Башмаковой. / Под. ред К.А. Рыбникова. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 96.

ские сущности. В своей попытке продемонстрировать то, что математику можно рассматривать как раздел логики, Г. Фреге использовал понятие класса, как объема понятия, которое в современной математике соответствует понятию множества. Понятие класса рассматривалось Г. Фреге как логическое, а не математическое понятие. Используя классы, он смог дать определение самого фундаментального понятия арифметики – числа. Для Г. Фреге числа были сведены к классам: например, число два – это класс всех классов, имеющих два элемента, число три – это класс всех классов, имеющих только три элемента, и так далее.

В своей работе «Основные законы арифметики» (Grundgesetze der Arithmetik), опубликованной в двух томах в 1893 и 1903 годах, Г. Фреге, наконец, представил свою реконструкцию арифметики, основанную только на логике, изложив строгим образом логические законы и правила, из которых можно было шаг за шагом и без обращения к каким-либо дополнительным предположениям продемонстрировать арифметические истины. Логическая программа Г. Фреге в случае успеха доказала бы, что достоверность математического знания не вытекает из чувственной интуиции или эмпирических фактов. Этот тезис противоречил мнению многих математиков и философов того времени, которые, под влиянием идей И. Канта считали, что математика зиждется на интуиции пространства (в случае геометрии) и времени (в случае арифметики).

Однако незадолго до публикации второго тома британский математик и философ Б. Рассел обнаружил противоречивость логической системы Фреге как попытки формализовать наивную теорию множеств Кантора, известную сегодня как парадокс Рассела. В основе определения числа у Фреге лежит использование понятия взаимнооднозначного соответствия. В § 72 «Основоположений арифметики»[1] он пишет: «(1) Выражение «понятие F равночисленно с понятием G» означает то же самое, что и «существует отношение f, которое устанавливает взаимнооднозначное

[1] Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-мат. исслед. о понятии числа. [Вступ. ст. и пер. В. А. Суровцева]. Томск: Водолей, 2000. 127 с.

соответствие между объектами, подпадающими под понятие F, с одной стороны, и объектами, подпадающими под понятие G, с другой стороны». (2) Число, которое принадлежит понятию F, является объемом понятия «равночисленно с понятием F». (3) «N есть число» означает то же самое, что и «существует понятие такое, что N есть присущее этому понятию число»».[1] Натуральное число у Фреге – «свойство понятия», то есть некоторый предикат от предиката. При этом Г. Фреге устанавливает строгое различие между предметом и классом, сводящимся к одному этому предмету. Но именно с этим определением было связано слабое место теории Фреге: в 1905 г. Бертраном Расселом была установлена противоречивость понятия множества всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента.[2] Парадокс Рассела показал, что не каждому лингвистически определенному понятию соответствует определенное множество. Этот недостаток подрывал все усилия Фреге обосновать математику полностью на базе чистой логики.[3]

Несмотря на то, что Г. Фреге не удалось создать логическую базу для математики, его математическая логика стала стандартным инструментом фундаментальных исследований, и ее изобретение сегодня признано одним из главных философских достижений западной философии, как по причине возможности ее применения к основам математики, так и потому, что она предопределила ряд событий, которые привели к созданию современных компьютеров.

В своей логической системе Фреге использовал понятие «класс» в том же смысле, в каком в «наивной» теории множеств используется понятие «множество» (совокупность вещей). Именно способ использования этого понятия привел к обнаружению парадокса в построениях Фреге. Парадокс Рассела выявил изъян в определении класса, или множества того времени. Это понятие широко использовалось и другими математика-

[1] Фреге, Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов / Пер. с нем. Б.В. Бирюкова. М.: Аспект Пресс, 2000. С. 48.
[2] Рассел, Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. Новосибирск, 2007. С. 8.
[3] Бурова, И.Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. М., Наука, 1976.. С. 140.

ми, главным образом благодаря трудам немецкого ученого Г. Кантора. Кантор, помимо использования множеств для решения математических задач, положил начало изучению теоретико-множественных понятий, создав то, что получило название теории множеств.[1]

Теоретико-множественный понятийный аппарат Г. Кантора оказался мощным инструментом, позволившим многие математические задачи интерпретировать как задачи, связанные с множествами. Однако открытие парадокса Б. Рассела оказало влияние на теорию Г. Кантора. Программы Г. Кантора и Г. Фреге основывались на возможности связывания лингвистических выражений с множествами, в то время как парадокс Рассела показывал, что понятие множества, используемое этими теориями, в некоторых случаях противоречит самому себе. Рассел показал, что, например, не существует множества, соответствующего понятию «множество всех множеств» или понятию «множество всех множеств, обладающих свойством не быть элементами самих себя». Пусть w предикат: «быть предикатом, который не приложим к самому себе». Может ли w быть приложим к самому себе? Из любого ответа следует обратное. Отсюда делается заключение, что иногда определённое множество не формирует целостного образования.[2]

Б. Рассел не был первым, кто обнаружил парадоксальность понятия множества. Кантор осознавал этот факт еще до открытия Б. Рассела. Однако «парадокс Рассела» оказался самой простой и удачной формулировкой из всех до тех пор сформулированных парадоксов. Извлеченный урок состоял в том, что понятие множества должно регулироваться аксиомами, которые утверждают, что множества существуют или могут быть построены, начиная с ранее заданных множеств. В 1908 году немецкий математик Э. Цермело впервые создал аксиоматическую систему для теории множеств Г. Кантора.[3] Позже другие математики расширили систему

[1] Кантор, Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 285.
[2] Рассел, Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. Новосибирск, 2007. С. 76.
[3] Френкель, А., Бар-Хиллел, И. Основания теории множеств. Пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. А.С. Есени-

Цермело, были построены версии аксиоматизации теории множеств. Немецкий математик А. Френкель, венгерский математик Джон Фон Нейман, швейцарский математик П. Бернайс и австрийский математик и логик К. Гедель внесли большой вклад в развитие аксиоматической теории множеств.

Теория множеств Г. Кантора ввела новый подход к математике и новую философию бесконечного. Одна из самых значимых идей, которую Г. Кантор принес в математику, заключается в том, что существуют различные порядки бесконечности, иными словами, не все бесконечные множества «равны». В 1874 году в статье «Ober eine Eigenschaft des Inbegriffes alter reellen algebraischen Zahlen» («Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»)[1] Г. Кантор опубликовал свое доказательство утверждения, согласно которому рациональных и алгебраических чисел существует столько же, сколько и натуральных, но что множество действительных чисел строго больше по размеру, хотя все эти множества содержат бесконечное число членов. Это был поразительный результат, поскольку все бесконечные множества ранее считались одинакового размера. Не менее важным, чем сам результат, был способ, которым Г. Кантор пришел к своему заключению, показав, что невозможно произвести пересчет всех действительных чисел.[2]

Л. Кронекер, являвшийся членом редколлегии журнала, где было опубликовано доказательство Г. Кантора, скептически отнесся к новым идеям, содержащимся в указанной статье, и попытался предотвратить публикацию более поздней работы Г. Кантора в журнале. Кронекер, как и многие математики его времени, принимал только те математические объекты, которые могли быть построены, исходя из чисел, полагавшиеся им интуитивно заданными, а именно, из натуральных чисел. Идеи Г. Кан-

на-Вольпина. М.: Мир, 1966. С. 316.
[1] Кантор, Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. С. 18–22
[2] Там же.

тора были, по мнению Л. Кронекера, бессмысленны, потому что они касались объектов, которые для него не существовали.

Развивая свою теорию порядков бесконечностей, некоторые из которых имеют большую мощность, чем другие, Г. Кантор предположил, что множество действительных чисел (континуум) является наименьшим возможным множеством, которое строго больше, чем множество натуральных чисел. Эта гипотеза, как известно, была названа континуум-гипотезой.[1] Г. Кантор стремился доказать правильность этой гипотезы, но все его попытки были безуспешны, и вопрос был оставлен на усмотрение математиков будущего. Несколько десятилетий спустя, используя методы математической логики, Гедель доказал, что континуум-гипотеза согласуется с аксиомами современной ему математики.

1884 год был для Г. Кантора годом кризиса, который, возможно, был вызван его неспособностью доказать континуум-гипотезу. Кантор изменил свое отношение к науке, стал больше интересоваться философией и стремился преподавать ее вместо математики.

К началу XX века математический и философский ландшафт был значительно изменен разработкой математической логики и теории множеств. Были предложены две новые парадигмы в математике. Логика, которая больше не рассматриваемая исключительно как часть философии, стала стандартным инструментом в математических исследованиях. Математика, благодаря введению теоретико-множественных понятий и методов, стала более абстрактной и ее фундамент уже не пытались свести исключительно к числам. Эти новшества придавали большее значение парадоксам, связанным с понятием множества.

Однако парадоксы не только не остановили прогресс математики, но и способствовали развитию современной логики. Язык и методы логики стали широко использоваться для придания математическим теориям точной и экономичной формы. Выражение больших частей математики в

[1] Кантор, Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 263.

формальной, аксиоматической структуре имело много преимуществ: можно было сделать явными все допущения, связанные с математическими рассуждениями, уменьшая и даже полностью игнорируя важность интуитивных процессов мышления. Таким образом, интуиция была вытеснена из формальной математики в том смысле, что ее нельзя было использовать для обоснования математических понятий или для доказательства истинности математических результатов.

Около 1900 года итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 – 1932) построил систему из пяти аксиом, из которой можно вывести всю арифметику натуральных чисел:

«1) 0 есть натуральное число;

2) следующее за натуральным числом есть натуральное число;

3) 0 не следует ни за каким натуральным числом;

4) всякое натуральное число следует только за одним натуральным числом;

5) аксиома полной индукции».[1]

Согласно Б. Расселу, постулаты Пеано неявно определяют, что мы подразумеваем под натуральным числом. Однако французский математик А. Пуанкаре утверждал, что аксиомы Пеано определяют натуральные числа только в том случае, если они непротиворечивы, то есть если внутри системы не может быть доказано самопротиворечивое утверждение вида «Р и не-Р». Если такое доказательство существует, то аксиомы противоречивы и нельзя сказать, что они что-то определяют.

Д. Гильберт, ведущая личность в математике того периода, разработал свою программу оснований, в которой стремился доказать непротиворечивость арифметики.[2] В его знаменитом списке нерешенных математических проблем, выдвинутом на Международном конгрессе математиков

---

[1] Арнольд, И. В. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1938. С. 48.

[2] Гильберт, Д., Бернайс, П. Основания математики: Логич. исчисления и формализация арифметики/Пер. с нем. Н.М. Нагорного; под ред. [и с предисл.] Адяна С.И. М.: Наука, 1979. 557 с.

в 1900 году в Париже, проблема непротиворечивости арифметики занимала второе место.

Некоторые математики считали, что новые неинтуитивные методы лишены математического смысла. Но для большинства ученых, особенно для Д. Гильберта, было абсурдным отказываться от мощных методов, ставших доступными благодаря теории множеств Г. Кантора. Итак, в 1922 году Д. Гильберт разработал фундаментальную программу, желая, как он утверждал, решить вопрос об основаниях математики раз и навсегда. Подчеркивая важность использования формальных аксиоматических систем, он надеялся установить непротиворечивость формализованных математических теорий. Особенность его программы, которая стала известна как формализм, состояла в том, что она требовала, чтобы доказательство непротиворечивости производилось методами, включающими только финитные отношения между языковыми символами, используемыми для выражения математических утверждений.[1] Такое доказательство защитило бы результат от радикальной критики тех, кто, подобно голландскому математику Л. Брауэру, требовал для математики более конкретного, вычислительного смысла.

Австрийский математик Курт Гедель доказал, что программа Д. Гильберта неосуществима, по крайней мере, в той форме, в какой Д. Гильберт хотел ее осуществить. В 1931 году К. Гедель доказал две теоремы, названные первой и второй теоремами неполноты, которые устанавливают строгий предел возможностей логики, формализации. Вторая теорема особенно повлияла на программу Д. Гильберта, поскольку утверждала, что непротиворечивость системы арифметики не может быть доказана с помощью средств самой этой системы.[2] Этот результат имел важные последствия, поскольку показал, что программа Д. Гильберта не может быть выполнена в ее первоначальном виде.

[1] Гильберт, Д. Основания геометрии. Пер. с 7-го нем. из.. Под ред. и со вст. статьей П.К. Рашевского. М.–Л.: Гостехиздат, Образцовая тип. в Мск., 1948. С. 147.
[2] Там же. С. 18.

Разработка проблем оснований математики продолжается и в настоящее время. Эти исследования пересекаются с математической логикой, – теорией моделей и теорией доказательств, – с аксиоматической теорией множеств и теорией вычислимости.[1] Они имеют также обширную составляющую онтологического и теоретико-познавательного характера.

В истории науки, особенно физики, мы встречаем примеры, когда ученые искали математические системы для описания устройства материального мира, например, в квантовой физике, теории относительности, и в результате обнаруживалось, что математики уже создали такие системы, до какого-либо рассмотрения перспектив их возможного использования в естествознании. Так, неевклидовы геометрии были разработаны задолго до того, как А. Эйнштейн в своей общей теории относительности предположил, что геометрия физического мира на самом деле неевклидова, хотя и приближается к Евклидовой на коротких расстояниях, малых скоростях и при сравнительно малой гравитации.[2]

Разработка оснований математики привела к прогрессу не только в самой математике, заставив математиков осмысливать, что именно они делают. Математические результаты рано или поздно, насколько позволяет об этом судить история науки, находят свое приложение, свою интерпретацию в физике или другой естественной науке. Развитие теории множеств явилось важной предпосылкой создания ЭВМ. Механические калькуляторы могли быть построены и до развития теории множеств, но современная компьютерная техника опирается на разделы математики, связанные с теорией множеств, теорией чисел, теорией вычислимости и др.

Среди вопросов, разрабатывающихся в настоящее время, некоторые, например континуум-гипотеза, были сформулированы еще при зарождении математической логики и теории множеств. Основания математики расширились и диверсифицировались, отчасти пересекаясь с формальной

[1]Беляев, Е.А., Перминов, В.Я. Философские и методологические проблемы математики / Е.А. Беляев, В.Я. Перминов. М., 1981. С. 145.
[2] Асмус, В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике, 2-е изд., М.: «Мысль», 1965. С. 38.

логикой и рядом математических областей. Фундаментальный кризис начала XX века и его развитие не привели к явной победе какого-либо из сформировавшихся в этот период направлений – логицизма, формализма, интуиционизма, реалистической или языковой трактовки математики. Вместе с тем, стало вполне очевидным, что все сущностные составляющие, выделяемые этими течениями как определяющие природу математики, несомненно характерны для этой науки. Это свидетельствует о несостоятельности претензий любого из течений на единственность и самодостаточность, свидетельствует о взаимосвязи и взаимодополняемости их результатов. Эвристическая значимость аномальных этапов развития науки подверглась многоаспектному осмыслению в философии математики прошлого столетия и была описана, как в явной, так и имплицитной формах. Наиболее конструктивным обобщением выявленных установок этого периода является утверждение, что математика выступает как эвристическое средство, как система представлений, которая может идти впереди остального знания и в определенной мере формировать его структуру.

2.3. Понятийный базис и его теоретико-познавательное значение в разработке новых разделов математики

Система понятий любой науки возникает при формировании самой науки, и в дальнейшем, как правило, претерпевает определенные изменения. Рассмотрим генезис и эволюцию некоторых наиболее неоднозначных математических понятий: иррациональные числа, бесконечно малые величины, непрерывность, дискретность, континуум, трансфинитные числа.

Иррациональные числа – это все те действительные числа, которые не могут быть выражены как целое число или как отношение двух целых чисел. Если отношение длин двух отрезков прямой представляет собой иррациональное число, то такие отрезки называются несоизмеримыми, что означает, что у них нет общей «меры», нет такой длины, пусть даже очень малой, короткой, которая могла бы быть использована для выражения длин обоих данных отрезков как целых кратных этой «мере».

Как и все вещественные числа, иррациональные числа могут быть выражены в любой позиционной системе счисления в виде бесконечной десятичной дроби. Иррациональные числа также могут быть выражены в виде нескончаемых непрерывных дробей и другими способами.

Первое доказательство существования иррациональных чисел приписывают пифагорейцу Гиппасу из Метапонта.[1] Согласно учению пифагорейской школы, существует достаточно маленькая, неделимая единица длины, которая могла бы равномерно вписаться в любую из длин. Гиппасу ещё в V веке до нашей эры удалось доказать, что такой единой единицы измерения не существует и что утверждение о таком существовании на самом деле приводит к противоречию. Он сделал это, показав, что если гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника соизмерима с катетом, то одна из этих длин должна быть одновременно нечетной и четной.

Греческие математики назвали это отношение несоизмеримых величин алогос (невыразимое). Открытие Гиппаса поставило очень серьезную проблему для пифагорейской математики, поскольку оно, казалось, разрушало их центральный тезис о том, что число – основа мира. Открытие несоизмеримых отрезков прямой указывало ещё на одну проблему, стоявшую перед греками: отношение дискретного к непрерывному.

Евдокс Книдский разработал новое понимание теории пропорций, которое учитывало не только соизмеримые, но и несоизмеримые величины. Величина «... не была числом, а обозначала такие объекты, как отрезки, углы, площади, объемы и время, которые могли изменяться, как мы сказали бы, непрерывно. Величины противопоставлялись числам, кото-

---

[1] Чанышев, А.Н. Италийская философия. М.: Издательство Московского государственного университета, 1975. С.56–57

рые перескакивали от одного значения к другому, как от 4 до 5».[1] Иными словами, разработка Евдоксом теории пропорций создала прочную базу для понимания и использования иррациональных чисел в математике.

В Средние века развитие математики наиболее существенно проявилось в странах Востока. Создание арабскими математиками алгебры приводит к тому, что иррациональные числа рассматриваются как алгебраические объекты. В 10 веке арабский математик Аль-Хашими представил общие рассуждения и доказательства для иррациональных чисел, где он рассматривал умножение, деление и другие арифметические операции. Многие из этих концепций были приняты европейскими математиками через некоторое время после латинских переводов XII века.

Создание теории комплексных чисел повлекло за собой разделение иррациональных чисел на алгебраические и трансцендентные, доказательство существования трансцендентных чисел и возврат к изучению теории иррациональных чисел. К. Вейерштрасс, Г. Кантор и Э. Гейне основывают свои теории на бесконечных рядах, в то время как Р. Дедекинд – на идее сечения в системе рациональных чисел, разделяя их на две группы, обладающие определенными характерными свойствами.

Дальнейшим шагом в развитии теории иррациональных чисел стало решение вопроса о том, все ли числа являются алгебраическими, т.е. корнями алгебраических многочленов с целыми коэффициентами. В 1844 году французский математик Ж. Лиувилль впервые привел пример трансцендентного (т.е. неалгебраического) числа.

До 1929 г. лишь для небольшого набора чисел была доказана их трансцендентность. Так, трансцендентность числа e (основания экспоненциальной функции) была доказана в 1873 г. французским математиком Ш. Эрмитом. В 1882 г. немецкий математик Ф. фон Линдеман доказал трансцендентность числа π. Академик А. А. Марков доказал трансцендентность чисел e и π новым методом. Советский математик А.О. Гель-

[1] Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики/Пер. с франц. А.А. Брядинской. Под ред. И.Г. Башмаковой. М.: Мир, 1986. С. 215.

фонд в 1934 г. доказал трансцендентность всех чисел вида α^β – любые алгебраические числа (при условии, что α не равно 0 или 1, а β иррационально). Из трансцендентности чисел α^β легко вытекает трансцендентность десятичных логарифмов всех целых чисел (кроме тех, которые являются полными степенями десяти).

Множества алгебраических и трансцендентных чисел существенным образом отличаются друг от друга. Множество алгебраических чисел бесконечно и счётно, т.е. равномощно множеству натуральных чисел, замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на 0). Множество трансцендентных чисел несчётно. Таким образом, трансцендентных чисел «больше», чем алгебраических. Их слишком много, чтобы можно было представить в виде последовательности.

Понятие непрерывности в математике имеет давнюю историю. Значение слова непрерывный – «сущность, которая не имеет промежутков». Обычно считается, что пространство и время непрерывны, а также что все естественные процессы происходят непрерывно. Например, Лейбниц утверждал, что natura non facit saltus – «природа не совершает скачка». Быть непрерывным – значит образовывать нечто неразрывное, сплошное. Непрерывная сущность – континуум – не имеет пробелов. Сущность, противоположная непрерывности, – дискретность. Дискретное состоит из отдельных точек, элементов, жестко разделенных между собой. Непрерывное подобно небу или океану, дискретное подобно гальке на пляже или листьям на дереве. Непрерывность означает единство, дискретность – множественность.

В математике понятию непрерывности давали всё более и более точные определения. Так, в конце XVIII века непрерывность функции означала, что бесконечно малые изменения значения аргумента индуцируют бесконечно малые изменения значения функции. В XIX веке это определение связывают с понятием предела.[1]

Традиционно бесконечно малая величина – это последовательность, переменная величина, такая, которая меньше любой конечной величины. Практически величина является бесконечно малой, если ее квадратом и всеми более высокими степенями можно пренебречь. В теории пределов бесконечно малой является последовательность, предел которой равен нулю. Таким образом, непрерывные кривые считались составленными из бесконечно малых прямых линий.

Прототипы бесконечно малых величин встречаются в учении древнегреческого философа Анаксагора,[2] но уже отсутствуют в математике Евклида. Приняв несколько неясную форму «неделимых», они вновь появляются в европейской математике в эпоху позднего средневековья. В XIX веке с появлением и развитием теории пределов математики отказываются от понятия бесконечно малых в связи с отсутствием его четкой определенности. Однако в последние годы понятие бесконечно малого было переосмыслено на более строгой основе.

Фундаментальная природа континуума состоит в неделимости, при этом любой континуум допускает бесконечное последовательное деление. В древности это утверждение встречало возражение. Основатель школы атомизма, Демокрит, утверждал, что существуют атомы, неделимые частицы, что для всего существует предел деления, и что не только материя, но и сама протяженность не является бесконечно делимой. В то же самое время атомисты утверждали, что непрерывное в конечном счете сводимо к дискретному, как на уровне ощущений, так и на уровне размышления. В XIX веке учение Демокрита получает триумфальное признание в физике и химии, и понятие континуума смещается в область математического познания.

---

[1] Shapiro, Stewart. Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000. P. 151.
[2] Лосев, А.Ф. История античной эстетики. Т. 1. М.: АСТ, 2000. С. 344–345.

Бесконечно малая величина была понята как «конечная часть» континуума. Если мы говорим, что дискретная сущность состоит из отдельных единиц, можно было бы аналогичным образом утверждать, что континуум состоит из бесконечно малых величин, как своих частей. Но каждая часть континуума делима, так как сама является континуумом. Это значит, что точка, как неделимый объект, не может быть частью континуума.[1] А значит, бесконечно малые величины, как части континуумов, не могут быть точками.

Конечные величины принимаются как нечто экстенсивное, такие как масса или объем, которые определяются в протяженных областях пространства. Напротив, бесконечно малые величины были истолкованы как интенсивные величины, локально определенные, такие как температура или плотность. Результатом «распределения» или «интегрирования» интенсивной величины по такой интенсивной величине является превращение первой в бесконечно малую экстенсивную величину: таким образом, температура преобразуется в бесконечно малую теплоту, а плотность - в бесконечно малую массу. Когда континуум определяется движением, связанные с ним бесконечно малые интенсивные величины идентифицируются как потенциальные величины.[2]

Бесконечно малое число – это число, которое, хотя и не совпадает с нулем, в некотором смысле меньше любого конечного числа. Неделимое – это то, что обычно понимается как не состоящее из частей. Неделимая сущность не обязательно должна быть бесконечно малой: души, индивидуальные сознания и Лейбницевские монады лишены частей, но, конечно же, не бесконечно малы.

Каким бы полезным оно ни было на практике, понятие бесконечно малого всегда подвергалось жесткой критике. В XVIII веке Беркли называл бесконечно малые «призраками ушедших величин», в XIX веке Кантор сравнивал их с «бациллами холеры», заражающими математику, а в

---

[1] Гайденко, П.П. Научная рациональность и философский разум. М.: Прогресс-Традиция, 2003. С. 278.
[2] Там же. С. 278-279.

XX веке Б. Рассел резко критиковал как «ненужные, ошибочные и само-противоречивые», как «логически сомнительные сущности». К началу 20-го века понятие бесконечно малого стало, по крайней мере, в анализе, «виртуальным» понятием. Тем не менее бесконечно малые величины широко использовались в различных дисциплинах более практической направленности, к примеру, в дифференциальной геометрии, физике, технических науках.

В шестидесятых годах прошлого века А. Робинсон, используя методы математической логики, создал нестандартный анализ, – расширение математического анализа, охватывающее бесконечно большие и бесконечно малые величины, развивая идею, которая, по существу, восходит к Лейбницу. А в семидесятые годы прошлого столетия разрабатывается гладкий инфинитезимальный анализ, основанный на идеях Уильяма Ловера и использующий методы теории категорий, он рассматривает все функции как непрерывные и невыражаемые через дискретные элементы. Данная теория может быть интерпретирована как описывающая мир, в котором линии состоят из бесконечно малых отрезков, а не из точек.[1] Развитие данных теорий вдохнуло новую жизнь в понятие бесконечно малого и дало новое понимание природы континуума.

Проблема противопоставления непрерывности и дискретности, имевшая место еще в древнегреческой философии, вытекает из более фундаментальной проблемы о едином и множестве, лежащего в основе ранней античной мысли. Греческие споры о непрерывном и дискретном, по-видимому, были вызваны попытками элейских философов VI-V вв. до н.э., таких как Парменид и Зенон, установить свою доктрину абсолютного монизма. Они, как известно, утверждали, что понимание бытия как делимого на части ведет к противоречию, что мир представляет собой статичное, неизменное единство. Парменидово бытие – это континуум без частей, одновременно континуум и атом.

---

[1] Lowver, F. W. An Elementary Theory of The Category of Sets (Long Version) With Commentary. Theory and Applications of Categories, No. 11, 2005. P. 15.

Учение атомизма, возникшее, по-видимому, как попытка преодолеть апории Зенона, было прежде всего физической теорией. Левкипп и Демокрит утверждали, что материя не бесконечно делима, а состоит из неделимых, твердых, однородных, пространственно протяженных частиц.

Атомизм был оспорен Аристотелем, который первым предпринял систематический анализ непрерывности и дискретности. Он утверждал, что физическая реальность – это непрерывная полнота и что структура континуума, общая пространству, времени и движению, не может быть сведена ни к чему иному. По мнению Аристотеля, непрерывные величины потенциально делимы до бесконечности.[1]

Аристотель определяет непрерывность и дискретность как атрибуты, относящиеся к категории количества. Такие величины, как прямые и плоскости, пространство и время непрерывны в силу того, что их составные части «соединяются вместе на некоторой общей границе». В то же время никакие составные части дискретной величины не могут иметь общей границы.

Один из центральных тезисов Аристотеля, – несводимость континуума к дискретному, – обосновывается тем, что континуум не может быть «составлен» из неделимых атомов или частей. Аристотель утверждал, что непрерывная величина не может состоять из точек, единиц, лишенных протяженности, но он не показал, что неделимая единица должна быть лишена протяженности.

В противовес атомистам стоики Зенон из Китиона и Хрисипп (III в. до н.э.) отстаивали аристотелевское положение о том, что пространство, время, материя и движение непрерывны. Все физические явления они рассматривали как связанные посредством растягивающих сил в пневме, а сама материя считалась производной от «связывающих» свойств пневмы, которую она содержит.

---

[1]Аристотель. Метафизика//Аристотель. Сочинения в 4-х т. [Перевод]. Т.1/Ред. В.Ф. Асмус. М.: Мысль, 1975 . С. 51.

Философы средневековой Европы, подчиняясь огромному авторитету Аристотеля, и, в той или иной форме, придерживавшиеся его позиции, утверждали, что континуумы не могут состоять из неделимых частиц. Хотя некоторые ученые того времени, например Г. Харклей, следовали Эпикуру в отстаивании разумного атомизма и попытались обойти контраргументы Аристотеля. Их идеи встретили решительное опровержение, инициированное Иоанном Дунсом Скотом, в котором он предлагает чисто геометрические аргументы против композиции континуума из неделимых элементов (атомов). Один из этих аргументов состоит в том, что если бы диагональ и сторона квадрата состояли из атомов, то они были бы соизмеримы.[1] Уильям Оккам признает, что из свойства плотности следует, что на произвольно малых отрезках прямой должно лежать бесконечно много точек, но из этого не следует, что линии или вообще любой континуум состоят из точек.

Значительный интерес представляют взгляды на континуум Николая Кузанского, поборника действительного бесконечного.[2] Он утверждает, что любой континуум делим в двух смыслах: идеальном и реальном. Идеальное деление прогрессирует до бесконечности, действительное деление завершается в атомах через конечное число шагов. Концепция реального бесконечного у Н. Кузанского отражена в его квадратуре круга. В середине XV века ученый пытался доказать, что круг может быть квадрирован плоским построением и разработал метод усреднения определенных вписанных и описанных многоугольников. Хотя впоследствии этот метод был признан ошибочным, это была одна из первых попыток решить данную проблему со времен Античности.

В начале Нового времени в Европе фокус сместился с метафизики на технику. Исчисление бесконечно малых величин, сформировавшееся в XVI-XVII веках и имевшее своим основным предметом непрерывную ва-

[1]Russel, B., Whitehtad A.N. Principia mathematica, Cambridge, Volume I. Second Edition. Cambridge, University Press, 1925. P. 257.
[2] См. Николай Кузанский. Сочинения в 2-х томах. Т.1, М.: Мысль, 1979. 488 с.

риацию, можно рассматривать как своего рода синтез непрерывного и дискретного, причем бесконечно малые величины заполняют промежуток между ними. Таким образом, именно бесконечно малое должно было служить математической ступенью между непрерывным и дискретным.

Г. Галилей отстаивал такую форму математического атомизма, в которой можно обнаружить влияние как атомистов, так и представителей аристотелевской схоластики. Он считал, что бесконечность неделимых никогда не будет получена последовательным делением, но «метод для разделения и разрешения одним ударом всей бесконечности» оказывается актом сгибания прямой в круг. Здесь Г. Галилей находит метафизическое применение идеи рассмотрения круга как бесконечностороннего многоугольника. Когда прямая изгибается в окружность, утверждает Г. Галилей, линия может была разделена на неделимые части, точки.[1] Эти части являются сторонами бесконечностороннего многоугольника, и их можно характеризовать не как неделимые точки, а как несгибаемые прямые, каждая из которых одновременно является частью окружности и касательной к окружности.

Р. Декарт использовал в своей математической работе методы бесконечно малых, включая метод неделимых Кавальери. Но Декарт различает разум и материю на том основании, что телесное, будучи пространственно протяженным, делимо, тогда как ментальное не имеет частей. Отождествление материи и пространственной протяженности имеет следствием то, что материя непрерывна и бесконечно делима. Таким образом, пространство у Декарта, как и у стоиков, – это объем, заполненный непрерывной средой.[2]

В 1873 году Г. Кантор продемонстрировал, что рациональные числа, хотя и бесконечны, являются счетными (или исчисляемыми), потому что они могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с нату-

---

[1]Галилей, Г. Пробирных дел мастер. М., 1987. С. 140.
[2]Декарт, Р. Рассуждение о методе. Метафизические размышления. Начала философии. Луцк: Вежа. 1998. С. 71–74.

ральными. Он показал, что множество действительных чисел бесконечно и несчетно, и что трансцендентные числа, которые являются подмножеством иррациональных, несчетны и поэтому более «многочисленны», чем целые числа, которые также бесконечны. Развивая новые способы постановки вопросов о непрерывности и бесконечности, Кантор вызвал споры в научном мире тем, что он объединил свою теорию с платоновской метафизикой. В то же время Л. Кронекер, считавший, что существуют только целые числа, в течение многих лет настойчиво отвергал его рассуждения.

В 1883 году Г. Кантор вводит понятие ординала или порядкового числа.[1] Новое множество представляет собой расширение множества натуральных чисел. Над ординалами можно производить те же арифметические действия, что и над другими числами – сложение, умножение, возведение в степень. Трансфинитные числа – это бесконечные порядковые числа. Данные числа сыграли важную роль в доказательстве различных теорем теории множеств. Особенно ценным оказался в данном случае принцип трансфинитной индукции.

В математике трансфинитные числа – это числа, которые бесконечны в том смысле, что они больше всех конечных чисел, но не обязательно абсолютно бесконечны. Эти числа можно разделить на два типа: трансфинитные кардиналы и трансфинитные ординалы. Трансфинитные кардиналы – это бесконечные числа, используемые для количественной оценки различных размеров бесконечности, которых существует множество. Помимо трансфинитных кардиналов, существуют также трансфинитные ординалы. Это числа, используемые для описания порядка множеств.

В 1895-97 годах Г. Кантор полностью изложил свой взгляд на непрерывность и бесконечность, включая бесконечные ординалы и кардиналы, в своей самой известной работе «К обоснованию учения о трансфи-

[1]Кантор, Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 211.

нитных множествах» (Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre). Эта работа содержит его концепцию трансфинитных чисел, к которой он пришел, продемонстрировав, что бесконечное множество может быть поставлено во взаимнооднозначное соответствие с одним из его подмножеств.

Трансфинитные числа, которые были введены Г. Кантором[1], известны в обозначении, которое он принял для них позже: в виде буквы ℵ (алеф) – первой буквы еврейского алфавита. Этой буквой обозначается мощность, то есть число элементов бесконечного множества, так что отношения эквивалентности между бесконечными множествами часто выражают через трансфинитные кардинальные числа, алефы.

Под наименьшим трансфинитным кардинальным числом он имел в виду кардинальное число любого множества, которое может быть поставлено во взаимнооднозначное соответствие с целыми положительными числами. Это трансфинитное число он называл алеф-нуль. Большие трансфинитные кардинальные числа обозначались алеф-один, алеф-два, ... Затем он разработал арифметику трансфинитных чисел, аналогичную конечной арифметике. Таким образом, он еще больше обогатил понятие бесконечности. Противостояние, с которым он столкнулся, и промежуток времени, прежде чем его идеи были полностью усвоены, представлен затруднениями математиков в переоценке древнего вопроса: «Что такое число?» Кантор показал, что множество точек на прямой обладает большим кардинальным числом, чем алеф-нуль. Это привело к проблеме гипотезы континуума, состоявшей в том, что нет кардинальных чисел между алеф-нуль и кардинальным числом точек на прямой. Эта проблема представляла большой интерес для математического мира и изучалась многими последующими математиками, включая К. Геделя и П. Коэна.[2]

На рубеже XIX–XX веков работы Кантора были окончательно признаны фундаментальными для развития теории функций, анализа и топо-

[1]Кантор, Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 173.
[2] Shapiro, Stewart. Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000. P. 151.

логии. Более того, его работы стимулировали в дальнейшем развитие как интуитивистской, так и формалистской школ мысли в основаниях математики. Таким образом, благодаря Г. Кантору понятие актуальной бесконечности стало доступно для строгого, формально-логического и математического анализа. Основной предмет теории множеств Г. Кантора – бесконечные множества. Однако теория множеств Г. Кантора была воспринята в научном мире неоднозначно. В то время как Гильберт считал теорию Кантора высочайшим проявлением математического гения, убежденными противниками этой теории были Л. Кроннекер и А. Пуанкаре. Пуанкаре даже назвал теорию трансфинитных чисел «болезнью», от которой, как он надеялся, математика когда-нибудь должна будет излечиться.

Г. Фреге был заинтересован в том, чтобы обеспечить философскую защиту притязаний математики быть совокупностью объективного знания.[1] Он выступал, с одной стороны, против позиций, которые рассматривают знание, как вопрос соотнесения идей, а, с другой стороны, против конвенционалистских утверждений, что математики свободны создавать новые системы чисел, поскольку они являются не более чем формальными системами символов.

Г. Фреге утверждал, что математика – это совокупность объективных знаний, и настойчиво отрицал предположение, что математики имеют право создавать новые математические объекты или понятия. Его концепция объективного знания, таким образом, реалистична. Такое знание относится к независимо существующей реальности. Она выражается в языке, который служит для представления этой реальности, используя предложения, которые являются либо истинными, либо ложными. Истинны ли такие предложения или ложны, зависит от состояния предметной области, о которой идет речь, и результат не зависит от состояния человеческого знания и когнитивных способностей. Поэтому сказанное не может быть функцией идей в сознании отдельных носителей языка. Зна-

[1]Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-мат. исслед. о понятии числа. [Вступ. ст. и пер. В. А. Суровцева]. Томск: Водолей, 2000. С. 131.

чения слов должны быть публично обоснованы их лингвистической функцией, которая относится к вкладу, который они вносят в фиксацию условий истинности предложений, в которых они встречаются. С точки зрения выражения знания предложение является первичной единицей значения.

Эти взгляды на язык и значение уводят философский взор от идей и мыслительных процессов к языку и его функции в передаче и выражении знания, они составляют то, что было названо «лингвистическим поворотом», характерным для аналитической философии. Этот поворот сделал широко доступной платоническую реалистическую стратегию, ибо язык здесь понимается не как какой-либо реально существующий естественный язык, а как идеальное средство выражения объективного знания, к которому все естественные языки должны приближаться в той мере, в какой они преуспевают в том, чтобы сделать возможным выражение знания. Идеальный логический язык становится искусственным посредником, связывающим человека со структурами реальности.

Мы можем узнать структурные принципы, управляющие истинным представлением в этом языке, потому что мы являемся носителями языка, и можем размышлять об условиях возможности функционирования языка таким образом. Эта идея нашла свое классическое выражение в «Логико-философском трактате» Л. Витгенштейна (1922).[1] Логика – это явная кодификация принципов языка в его репрезентативной, выражающей знание функции. Его законы не присущи структуре человеческого интеллекта, это законы истины, а не законы мысли. Структуры такого идеального языка, способного точно представлять реальность, должны, следовательно, также быть отражениями структуры реальности.

Что дает основание полагать, что изучение величин может быть осуществлено посредством изучения структурных схем, системы отношений между объектами, и что в конечном счете математика может быть

[1] Витгенштейн, Л. Избранные работы. М.: Издательский дом «Территория будущего», 2005. С. 14 – 25.

сведена к логике? Связующим звеном здесь может стать понятие «класса» или «множества». Теория классов, объемов понятий, традиционно была частью логики, потому что аристотелевская силлогистика может, по одной интерпретации, рассматриваться как логика классов и их отношений. Натуральные числа же можно рассматривать как меры размеров множеств или классов, например, число 2 может быть мерой всех 2-элементных множеств. Можно показать, что отрицательные числа и рациональные числа могут быть определены как наборы (или упорядоченные пары) натуральных чисел. Р. Дедекинд предложил определение действительных чисел как бесконечных множеств (или разрезов) рациональных чисел. Это предполагало, что «множество», или «класс», может быть единственным простым понятием, из которого можно было бы определить все другие математические понятия, если бы геометрия и анализ сами могли быть сведены либо к арифметике, либо к изучению множеств точек.[1]

Кантор основывал свое определение числа на концепции, которую можно найти уже у Платона. Число 2, например, состоит из двух абстрактных единиц, это идеальный тип (один над многими), которому соответствуют все пары. Кантор предположил, что к числам приходит психологический процесс абстрагирования от наборов, таких как два карандаша на столе. Мы должны образно удалить все отличительные качества карандашей и их расположение. Если мы абстрагируемся от всего, кроме порядка, мы получаем порядковое число, и если мы абстрагируемся даже от этого, мы получаем кардинальное число (тип мощности).[2] Другими словами, платоновское универсальное становится идеей в индивидуальном сознании. Но Г. Фреге принял определение, которое делает 2 просто классом всех пар. Он определяет, что значит быть двухчленным классом, не используя никакой ссылки на число 2. Класс по определению является двухчленным классом тогда и только тогда, когда существует взаимно-

[1] См. Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа. Пер. с нем. проф. С.О. Шотуновского со ст. Переводчика: «Доказательство существования трансцендентных чисел». 4-е испр. изд. Одесса: Mathesis, 1923. 44 с.
[2] Cantor, G. Gesammelte Abhandlungen. Edited by E. Zermelo P.p. vii, RM. 48. 1932.S. 251.

однозначное соответствие между ним и классом, единственными членами которого являются 0 и 1. Таким образом, сказать, что на моем столе есть два карандаша, значит сказать, что класс карандашей на моем столе таков, что существует взаимно-однозначное соответствие между ним и $\{0,1\}$. Таким образом, число 2 по определению связано с его потенциальными приложениями. Но чтобы обосновать утверждение, что все арифметические истины могут быть доказаны только путем обращения к определениям и формально выраженным логическим законам, приведенные выше определения должны быть выражены на языке формальной логики и должны использовать только понятия, принадлежащие логике. Далее, необходимо показать, что все обычно принятые арифметические принципы могут быть логически выведены из этих определений.

Сосредоточенность на предложении как единице значения позволила Г. Фреге рассматривать выражения понятий и реляционные выражения (предикаты) по аналогии с математическими функциями одной, двух или более переменных, как операторы формирования предложения. Именно в рамках этой расширенной логической структуры Г. Фреге утверждал, что арифметика сводится к логике. То, что раньше было главным камнем преткновения для такого утверждения – реляционный характер арифметических рассуждений, – было преодолено интеграцией логики отношений с логикой понятий.

Эта блестящая стратегия, как уже было сказано, потерпела неудачу в результате того, что Б. Расселом была обнаружена противоречивость системы. Однако Б. Рассела привлекла стратегия Г. Фреге. Если бы удалось показать, что вся математика сводима к логике, то это существенно усилило бы аргументы в пользу эмпирического отрицания какой-либо автономии концептуального знания. Объективное познание окружающего нас мира, предпринятое естествознанием, представляет собой описание глобальных, структурных особенностей совокупности событий, составляющих Вселенную. Она принимает форму знания отношений между чувственными данными. Чувственные качества, поскольку они могут быть познаны только субъективно, должны выпадать из научной картины. Таким образом, все простые, атомарные предложения будут утверждать, что между двумя или более чувственными данными существует определенное отношение.[1]

Поскольку порядок событий случаен, мы никогда не сможем определить истинность любого глобального описания. Условия его истинности таковы, что только существо, постигающее всю пространственно-временную Вселенную в едином созерцании, может непосредственно проверить его истинность. Форма, которую примет прямое описание такого мира, будет представлять собой список всех истинных атомарных предложений идеального логического языка науки. Если использование математики в науке должно привести к объективно истинным описательным утверждениям об этом мире, каждое описание, данное с использованием математических терминов, должно быть сокращением, которое без остатка сводится к некоторому (возможно, бесконечному) сложному предложению, построенному из атомарных предложений таким образом, что истинностное значение конструкции определяется значениями ее атомарных компонентов. Иными словами, конструкция строится с использованием истинностных функций. Сформировать понятие – значит раскрыть его содержание в той мере, чтобы про любой объект можно было сказать, входит он или не входит в объём рассматриваемого понятия. Определение понятия представляет собой раскрытие его содержания. Обычно для определения используется минимальная система существенных признаков. Математические истины – это те истины, которые могут быть логически выведены из определений математических понятий. Они ничего не говорят о мире, но они помогают нам делать логически правильные шаги вокруг языка, который мы разработали для его описания. «Дело логики по большей части и состоит как раз в борьбе с логическими

[1] См. Рассел, Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. Новосибирск, 2007. 264 с.

недостатками языка, который, тем не менее, является для нас неотъемлемым орудием».[1]

Как Б. Рассел предлагал избежать проблемы, с которой столкнулся Г. Фреге? Его конечным решением является так называемая неклассовая теория, которая включает в себя его «разветвленную теорию типов». (1) классы – это логические фикции, они не являются реальными индивидуальными объектами; (2) по этой причине язык, который включает в себя эти фикции, должен иметь иерархическую структуру. На базовом уровне мы имеем эмпирический мир элементарных объектов. Понятия определяются над этими объектами, и для удобства мы вводим названия классов как краткий способ говорить обо всех вещах, к которым применимо данное понятие. Эти классы явно не могут рассматриваться как принадлежащие к первоначальному уровню, но как только они были введены, и, используя их, можно определить новые понятия и ввести классы на более высоком уровне. Это приводит к исключению возможности того, что класс должен принадлежать самому себе, а также возможности определения понятия «является классом», можно определить только «является классом уровня n». Однако, как признал Б. Рассел, не было никакой надежды на развитие математики в этих рамках без двух существенных допущений: аксиомы бесконечности и аксиомы сводимости.

Аксиома бесконечности гласит, что во Вселенной бесконечно много элементов. Основная идея все та же – число «2» должно быть классом всех двухчленных классов индивидов, но требуется другое определение того, что значит быть двухчленным классом, а именно такое, которое не относится к 0 и 1. Решение состояло в том, чтобы определить двучленный класс как расширение любого понятия F, для которого верно следующее: «существуют различные объекты x и y, которые удовлетворяют F, и каждый объект, который удовлетворяет F, тождествен либо с x, либо с y».[2]

[1] Фреге, Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов / Пер. с нем. Б.В. Бирюкова. М.: Аспект Пресс, 2000.С. 376.
[2] Рассел, Б. Введение в математическую философию. Избранные работы. Новосибирск, 2007. С. 170.

Однако это означает, что во вселенной, содержащей только один объект, 2 будет пустым классом, а также 3 и каждое большее число. Таким образом, чтобы гарантировать, что существует бесконечно много натуральных чисел, необходимо предположить, что существует бесконечная вселенная. Это иллюстрирует невозможность одновременного ограничения объектов теми, которые обнаруживаются в реальном мире.

Аксиома сводимости необходима для определения действительных чисел как бесконечных классов рациональных чисел. По существу, она утверждает, что все возможные способы группирования элементов в классы доступны с использованием понятий, определяемых на первом уровне иерархии, то есть введение более сложных понятий, определения которых ссылаются на уже определенные понятия и классы, на самом деле не делает возможными какие-либо новые и не расширяет наши возможности для описания структуры мира.

Таким образом, проблема понятийного аппарата – это проблема логичности, точности, последовательности и непротиворечивости знания, образующего целостность и завершенность конструкции любой науки. Преодоление аномалий, как мы видели, а также дальнейшее развитие областей знания, преодолевших аномалии, непосредственно связано с уточнением и расширением базисного понятийного аппарата, формирующего фундамент этих областей. Аномальные периоды в развитии математики обуславливают необходимость пополнения ее фундаментального набора понятий новыми, обладающими сущностной значимостью и спецификой элементами. Именно они позволяют создавать новые разделы этой науки. Данная схема действует, как в преодолении обнаруживающихся внутренних противоречий, так и для ответа на запросы соответствующего этапа эволюции науки в целом.

Заключение

Подводя итоги исследования мы можем утверждать, что рационалистические представления о математических понятиях эволюционируют от античности до наших дней. Преобразование взглядов совершает диалектический круг, возвращаясь к исходным положениям на новом уровне. Трактовка математических истин как приемов землемерия и счета, как сущности мира, космоса, как божественных истин, как эмпирических обобщений и свойств разума, как средства естествознания и способа универсализации языка, к XX столетию вновь возвращается к идее абстрактного выражения наиболее общих свойств и связей действительности. В науке XX в. математика все более стала выступать как эвристическое средство, как то, что позволяет предвидеть путь дальнейшего движения научного поиска, путь, на котором просматриваются возможности будущих открытий законов реального мира. Пифагорейская идея внутренней гармонии из критерия истинности превратилась в настоящее время в один из эвристических принципов.

Представители фундаменталистского и социокультурного подходов в философии математики, по-разному оценивая генезис и эволюцию математического знания, сходятся в признании эвристической роли аномальных этапов (кризисов) в развитии математики.

Трактовка природы математических объектов и истин, критерии истинности претерпели значительную трансформацию в XX веке. Проблемы, порождающие полемику, как в отечественной, так и в зарубежной философско-математической мысли, – это, прежде всего, вопросы бытийно-познавательного истолкования, разработка моделей онтологических и гносеологических основ математики, – приводят с возникновению многочисленных версий реализма, номинализма, эмпиризма, психологизма и их симбиозов.

Аномальные этапы в ходе развития математики, как и в естествознании, приводили к возникновению новых математических теорий, новых направлений, концепций, расширению структуры, принятию новых парадигмальных установок.

Фундаментальный кризис начала XX века и его развитие не привели к явной победе какого-либо из сформировавшихся в этот период направлений – логицизма, формализма, интуиционизма, реалистической или языковой трактовки математики. Это свидетельствует о несостоятельности претензий любого из течений на единственность и самодостаточность, свидетельствует о взаимосвязи и взаимодополняемости их результатов. Эвристическая значимость аномальных этапов развития науки подверглась многоаспектному осмыслению в философии математики прошлого столетия и была описана, как в явной, так и имплицитной формах. Наиболее конструктивным обобщением выявленных установок этого периода является утверждение, что математика выступает как эвристическое средство, как система представлений, которая может идти впереди остального знания и в определенной мере формировать его структуру.

Аномальные периоды в развитии математики обуславливают необходимость пополнения ее базисного набора понятий новыми, обладающими сущностной значимостью и спецификой элементами. Именно они позволяют создавать новые разделы этой науки. Данная схема действует, как в преодолении обнаруживающихся внутренних противоречий, так и для ответа на запросы соответствующего этапа эволюции науки в целом.

Библиографический список

1. Антаков, С.М. Фундаментализм и его отрицания в философии науки (наука как предмет философии) // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Социальные науки, Нижний Новгород, 2007, №1, с. 301 – 307.
2. Арепьев, Е.И. Аналитическая философия математики. 2 изд-е, доп. / Е.А. Арепьев. – Курск: Изд-во Курск. гос. пед. ун-та, 2003. – 191 с.
3. Арепьев, Е.И. Домножественная реалистическая интерпретация онто-гносеологических основ математики / Е.И. Арепьев // Вопросы философии. – М., 2010. – №7. – С. 82 – 92.
4. Арепьев, Е.И. Природа чисел в свете расширенной трактовки действительности // Российский гуманитарный журнал. 2014. Т. 3. № 4. С. 229-236.
5. Арепьев, Е. И. Перспективы реализма в онтологическом обосновании математики: аргументы к одной интерпретации/ Ученые записки: электронный научный журнал Курского государственного университета. 2013. № 3 (27). Том 1. [Электронный ресурс]. – https://cyberleninka.ru /article/n/perspektivy-realizma-v-ontologicheskom-obosnovanii-matematiki-argumenty-k-odnoy-interpretatsii
6. Аристотель. Метафизика//Аристотель. Сочинения в 4-х т. [Перевод]. Т.1/Ред. В.Ф. Асмус. – М.: Мысль, 1975 – 368 с.
7. Арнольд, И.В. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз, 1938. – 480 с.
8. Аршинов В.И., Буданов В.Г., Суханов А.Д. Естественнонаучное образование гуманитариев: на пути к единой культуре // Общественные науки и современность, №5, 1994. – С.113 -118.
9. Асмус, В.Ф. Проблема интуиции в философии и математике, 2-е изд., М.: «Мысль», 1965. – 312 с.

10. Бажанов, В.А. Разновидности и противостояние реализма и антиреализма в философии математики. Возможна ли третья линия? // Вопросы философии. №5. 2014. С. 52 – 63.

11. Барабашев, А.Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования.– М.: Изд-во МГУ, 1991.– 160 с.

12. Барабашев, А.Г. Диалектика развития математического знания: закономерности эволюции способа систематизации. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 166 с.

13. Беляев, Е.А., Перминов, В.Я. Философские и методологические проблемы математики / Е.А. Беляев, В.Я. Перминов. – М., 1981. – 217 с.

14. Бирюков, Б. В. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времён до эпохи кибернетики. - М.: Изд-во «Знание», 1985. – 192 с.

15. Болибрух, А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). – М., 1999. – 24 с.

16. Бройль Луи де. По тропам науки. Перевод с франц. канд. Физ.-мат. Наук С.Ф. Шушурина. Послеслов и общ. ред. д-ра филос. наук И.В. Кузнецова. – М.: Изд. иностр. лит, 1962. – 408 с.

17. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики // пер. с франц. И.Г. Башмаковой. / Под. ред К.А. Рыбникова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 292 с.

18. Бурова, И.Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. – М., Наука, 1976. – 176 с.

19. Ван дер Варден, Б.Л. Пробуждающая наука. Математика др. Египта, Вавилона и Греции – [Пифагорейское учение о гармонии]. Пер. с голланд. и замеч. И.В. Веселовского. – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.

20. Васюков, В.Л. Логические основания неклассической науки // Философия, методология и история науки. Научно-практический журнал. 2016. № 2. Том 2. – С. 66 –76.

21. Вейль, Г. Математическое мышление: Пер. с англ. и нем. / Под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

22. Вейль, Г. О философии математики // перев. с нем. А. П. Юшкевича. Предисл. С.А. Яновской. – М.– Л.: Гостехиздат, 1934. – 128 с.

23. Вечтомов, Е. М. Метафизика математики [Текст]: Монография / Е. М. Вечтомов. - Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.

24. Вилейтнер, Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. под ред. А.П.Юшкевича. – М.: Физматлит, 1960.- 469 с.

25. Витгенштейн, Л. - Избранные работы. М.: Издательский дом «Территория будущего», 2005.- 440 с.

26. Войцехович, В.Э. Становление математической теории: (Философско-методол. анализ): автореферат дис. ... доктора философских наук: 09.00.01 / Ин-т философии. - Москва, 1992. - 29 с.

27. Гадамер Х.-Г. Истина и метод: Основы философской герменевтики. – М.: Прогресс, 1988. – 704 с.

28. Гайденко, П.П. Научная рациональность и философский разум. - М.: Прогресс-Традиция, 2003. – 528 с.

29. Галилей, Г. Пробирных дел мастер. – М., 1987. – 272 с.

30. Гегель, Г.В.Ф. Система наук. Ч. 1: Феноменология духа. СПб.: Наука, 1999. – 444 с.

31. Гильберт, Д. Основания геометрии. Пер. с 7-го нем. из.. Под ред. и со вст. статьей П.К. Рашевского. – М.–Л.: Гостехиздат, Образцовая тип. в Мск., 1948. – 492 с.

32. Гильберт, Д., Бернайс, П. Основания математики: Логич. исчисления и формализация арифметики / Пер. с нем. Н.М. Нагорного; под ред. [и с предисл.] Адяна С.И. – М.: Наука, 1979. – 557 с.

33. Готт, В.С. Симметрия и асимметрия. Некоторые категории диалектики/ В.С. Готт. – М., 1963. – С. 48–57.

34. Гутнер, Г.Б. Онтология математического дискурса: сущность и структура в математическом рассуждении. –– М.: Изд-во Моск. культурол. Лицея, 1999. – 118 с.

35. Гуссерль, Э. Логические исследования. Т. I: Пролегомены к чистой логике. М.: Академический Проект, 2011. – 253 с.

36. Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / Пер. с франц. А.А. Брядинской. Под ред. И.Г. Башмаковой. – М.: Мир, 1986. – 431 с.

37. Дедекинд, Р. Непрерывность и иррациональные числа. Пер. с нем. проф. С.О. Шотуновского со ст. Переводчика: «Доказательство существования трансцендентных чисел». – 4-е испр. изд. – Одесса: Mathesis, 1923.– 44 с.

38. Декарт, Р. Рассуждение о методе. Метафизические размышления. Начала философии. – Луцк: Вежа. 1998. – 302 с.

39. Декарт, Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта / Перевод, примечания и статьи А. П. Юшкевича. – М.–Л.: Гостехиздат, 1938. – 297 с.

40. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. Ред. и авт. вступ. ст. А. Ф. Лосев; Пер. с древнегреч. М. Л. Гаспарова. – М.: Мысль, 1998. – 570 с.

41. Жог, В.И. Единство симметрии и асимметрии и научное познание./ В.И. Жог // Философские науки, 1984. – № 6. – С. 39–48

42. История математики. Т. I. С древнейших времён до начала Нового времени / Под редакцией А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

43. История математики. Т. II. Математика XVII столетия / Под редакцией А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 301 с.

44. История математики. Т. III. Математика XVIII столетия / Под редакцией А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

45. Кант, И. Критика способности суждения//Вступ. статья и коммент. А.В. Гулыги. – М.: Искусство, 1994. – 368 с.

46. Кант, И. Критика чистого разума//Кант И. Собрание сочинений: в 8-ми т. – Т. 3. – М.: Чоро, 1994. – 741 с.

47. Кантор, Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 432 с.

48. Карнап, Р. Преодоление метафизики логическим анализом языка / Пер. А. В. Кезина // Вестник Московского университета Серия 7. Философия. — № 6. — 1993. С. 11 – 26.

49. Касавин, И.Т., Сокулер, З.А. Рациональность в познании и практике: критический очерк. — М., 1989. – 192 с.

50. Катасонов, В.Н. Метафизическая математика XVII века / Отв. ред. А. П. Огурцов. Изд. 2-е. – М., 2011. – 144 с.

51. Клайн, М. Математика. Утрата определенности: пер. с англ. / под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. – М.: Мир, 1984. - 434 с.

52. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2-х томах. Т.1: Пер. с нем./Под ред. М.М. Постникова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 456 с.

53. Клини, С. Введение в метаматематику. Пер. с англ. А.С. Есенина-Вольпина; Под. ред. В.А. Успенского. – М.: Изд-во Ин. лит., 1957. – 526 с.

54. Князев, В.Н. Исаак Ньютон: ученый и мыслитель (к 375-летию со дня рождения) // Экономические и социально-гуманитарные исследования. №1, 2018. – С. 215 – 220.

55. Князев, В.Н. Эпистемологические аспекты взаимоотношения научной и философской веры // Метафизика. 2019. №3 (33). С. 8 – 17.

56. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В. А. Успенского.- М.: Наука, 1991. – 224 с.

57. Коперник, Н. О вращениях небесных сфер. Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись / Перевод И. Н. Веселовского. – М.: Наука, 1964. – 646 с.

58. Кочергин, А.Н. Философия и наука: грани взаимодействия. Смоленск, 2009. – 299 с.

59. Кун, Т. Структура научных революций. М.: Прогресс, 1977. – 300с.

60. Курант, Р., Робинсон, , Г. Что такое математика? Элемент. очерк идей и методов. Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1967. – 558 с.

61. Кутырев, В.А. Спекулятивный реализм как философия фактичности начала конца человеческого (мира). (Размышление над книгой: Квентин Мейясу. После конечности. Эссе о необходимости контингентности. Екатеринбург – Москва. 2015). // Философия и культура. – 2018. – № 10. – С.8–17. [Электронный журнал]. – http://e-notabene.ru/pfk/article_ 27939.html

62. Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. Пер. с англ. И.Н. Веселовского. – М.: Наука, 1967. – 152 с.

63. Лакатос, И. Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. – М.: Медиум, 1995. – 236 с.

64. Лейбниц, Г.В. Новые опыты о человеческом разуме автора системы предустановленной гармонии. Пер. с франц.//Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. – Т.2/Ред., авт. вступ. ст. и примеч. И.С. Нарский. – М.: Мысль, 1983. – С. 47–545.

65. Лейбниц, Г.В. История идеи универсальной характеристики. Пер. с лат. Г.Г. Майорова//Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т. – Т.3/Ред. и сост., авторы вст. статей и примеч. Г.Г. Майоров и А.Л. Субботин. – М.: Мысль, 1984. – С. 412 – 418.

66. Лейбниц, Г.В. Начала и образцы всеобщей науки. Пер. с лат. Г.Г. Майорова // Там же, с.435–443.

67. Лолли, Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия / Пер. с итал. А.Л. Сочкова, С.М. Антакова, под ред. проф. Я.Д. Сергеева. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2012. – 299 с.

68. Лосев, А.Ф. История античной эстетики. Тт. 1, 2. – М.: АСТ, 2000. – 624 с., 846 с.

69. Мазуров, В.Д. Философия математики / В.Д. Мазуров // Вестник Уральского института экономики, управления и права, 2016. – №1. – С. 56–67

70. Мамчур, Е.А. Объективность науки и релятивизм: (К дискуссиям в современной эпистемологии). – М., 2004. – 242 с.

71. Мануйлов, В.Т. Две концепции обоснования математического знания // Философия. История. Культура. Часть 1. – Курск. пед. об-во, 1995. – С. 25-39.

72. Мануйлов, В.Т. Конструктивность как принцип обоснования научного знания. «Философские науки». – М.: Гуманитарий, 2003, №10, - С. 104-121.

73. Математика и опыт/ Под ред. А.Г. Барабашева. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 624 с.

74. Мейясу, К. После конечности: эссе о необходимости контингентности /пер. Л. Медведевой. Екатеринбург. 2015. 196 с.

75. Микешина Л.А. Методология научного познания в контексте современной культуры. – М.: Исслед. центр по пробл. управления качеством подгот. специалистов, 1992 – 143 с.

76. Мороз, В.В. На пути к пониманию природы геометрии: И. Кант и П. Флоренский // Философия Иммануила Канта и цивилизационные вызовы нашего времени. Сборник статей. – М.: Изд-во РАГС, 2004. – С. 159-169.

77. Никаноров, С.Н. Число у Аристотеля и в философии Нового времени. [Электронный ресурс]. – http://turba-philosophorum.narod.ru /forskninger/Nikanorov/1_Num_ Arist.html (Дата обращения 07.07.2021).

78. Николай Кузанский. Сочинения в 2-х томах. Т.1, М.: Мысль, 1979. – 488 с.

79. Панов, М.И. Философия математики XX века (обзор) //Философия в XX веке: в 2-х ч.: Сб. обзоров и рефератов / РАН. ИНИОН. – М., 2003. – Ч.2. – С. 11 – 40.

80. Перминов, В.Я. Априорность и реальность исходных представлений математики / В.Я. Перминов // Вестник Московского университета. – Серия 7. – Философия, 2010, №4. – С. 24 – 44.

81. Перминов, В. Я. Философские и методологические проблемы математики // Издательство Московского Университета, 1981. – 217 с.

82. Перминов, В.Я. Философия и основания математики – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – 320с.

83. Перминов, В.Я. Ложные претензии социокультурной философии науки // Стили в математике: социокультурная философия математики /Под ред. А. Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ. 1999. – С. 235 – 252..

84. Платон. Тимей. Перевод С. Аверинцева. В кн.: Платон. Собр. соч. в 4-х томах. Том 3. М.: Мысль, 1994. – С. 421 – 500

85. Побережный, И.А. – Интуиция в математике: от интуитивизма А. Пуанкаре к интуиционизму Л. Брауэра и Г. Вейля // Философская мысль. – 2019. – № 5. – С. 1 - 6.

86. Поппер, К. Логика и рост научного знания Избр. работы. Пер. с англ.; Сост., общ. ред. и вступ. ст. В. Н. Садовского. – М.: Прогресс , 1983. – 605 с.

87. Поппер, К. Факты, нормы и истина: дальнейшая критика релятивизма / Открытое общество и его враги: В 2-х т. – Т.2: Время лжепророков: Гегель, Маркс и другие оракулы / Пер. с англ. под ред. В.Н. Садовского. – М.: Феникс, 1992. – С. 441 - 473.

88. Птолемей, К. Альмагест / Перевод с древнегреческого И. Н. Веселовского, Науч. ред. Г.Е. Куртик. – М.: Наука, 1998. – 672 с.

89. Пуанкаре, А. О науке. - М.: Изд-во «Наука», 1983. - 560 с.

90. Рассел, Б. Введение в математическую философию. Избранные работы [Текст] / Б. Рассел; вступ. статья В. А. Суровцева; пер. с англ. В. В. Целищева, В. А. Суровцева. - Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2007. - 264 с.

91. Рассел, Б. История западной философии: В 3 кн.: 3-е изд., испр. / пер. с англ.; подгот. текста В. В. Целищева. - Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2001. – 1806 с.

92. Рейхенбах Г. Философия пространства и времени. Пер. с англ. д-ра филос. н. Ю. Б. Молчанова/Общ. Ред. акад. А. А. Логунова. и д-ра филос. Н.

И. А. Акчюрина. – М.: Прогресс, 1985. – 349 с.

93. Родин, А.В. Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля. - М.: Наука, 2003. – 211 с.

94. Розин, В.М. Исследования-этюды по философии науки. Йошкар-Ола. ПГТУ, 2017. – 356 с.

95. Рузавин, Г.И. О природе математического знания (Очерки по методологии математики). – М.: Мысль, 1968. – 302 с.

96. Рузавин, Г.И. Философские проблемы оснований математики / АН СССР, Ин-т философии. – М.: Наука, 1983. – 302 с.

97. Рыбников, К.А. История математики: Учебник. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 496 с.

98. Сокулер, З.А. Современные исследования по философским вопросам математики. - М.: ИНИОН, 1983. – 61 с.

99. Стили в математике: социокультурная философия математики /Под ред. А. Г. Барабашева. – СПб.: РХГИ. 1999. – 552 с.

100. Стройк, Д.Я. Краткий очерк истории математики. Пер. с нем.– 5-изд., испр.– М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1990.– 256 с.

101. Успенский, В.А. Теорема Геделя о неполноте. – М.: Наука, 1982.– 111 с.

102. Фрагменты ранних греческих философов. (От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики). [Перевод АН СССР, Ин-т философии]. Изд. А. В. Лебедева. – М.: Наука, 1989. – 575 с.

103. Фреге, Г. Логика и логическая семантика: Сборник трудов / Пер. с нем. Б.В. Бирюкова. – М.: Аспект Пресс, 2000. – 512 с.

104. Фреге, Г. Основоположения арифметики: Логико-мат. исслед. о понятии числа. [Вступ. ст. и пер. В. А. Суровцева]. – Томск: Водолей, 2000. – 127 с.

105. Френкель, А., Бар-Хиллел, И. Основания теории множеств. Пер. с англ. Ю.А. Гастева; под ред. А.С. Есенина-Вольпина. – М.: Мир, 1966. – 556 с.

106. Фрейсинэ, Ш. Очерки по философии математики. Пер. с фр. Изд. стереотип. М. 2015. – 170 с.

107. Хинтикка, Я. Проблема истины в современной философии // Пер. с англ. Н.Н. Шульгина//Вопросы философии. - № 9, 1996. – С. 46-58.

108. Цейтен, Г. История математики в древности и в средние века. – М., 1932. – 232 с.

109. Целищев, В.В. Поиски новой философии математики / В. В. Целищев // Философия науки. – 2001. – № 3(11). – С. 8.

110. Целищев, В.В. Неологицизм, аксиома бесконечности и логические константы / В. В. Целищев // Философия науки. - 2010. - № 2(45). - С. 21-33.

111. Чанышев, А.Н. Италийская философия. М.: Издательство Московского государственного университета, 1975. – 216 с.

112. Шапошников, В.А. Философия математики в эпоху перемен: поворот к математической практике и ориентация на приложения // История и философия науки в эпоху перемен: сборник научных статей/ Т.1. – М.: «Русское общество истории и философии науки», 2018. – С. 47 – 49.

113. Юшкевич, А.П. История математики в России до 1917 года. – Л.: Наука, 1968. – 591 с.

114. Яглом, И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Сов. Радио, 1980. – 144 с.

115. Ямвлих. Жизнь Пифагора. [Перевод]; Подгот. [и вступ. ст.] В. Б. Черниговский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Алетейа: Новый Акрополь, 1998. – 240 с.

116. Яновская, С.А. Методологические проблемы науки. М.: Мысль, 1972. – 280 с.

117. Яшин, Б.Л. Математический реализм: современные подходы. // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук: сб. науч. тр. Вып. 9 / гл. ред. Е.И. Арепьев; Курск. гос. ун-т. Курск, 2018. – С. 99-109.

118. Яшин, Б.Л. Социокультурные аспекты математического познания и этноматематика // Педагогика и просвещение. – 2016. № 1. – С. 60–70.

119. Armstrong, D. M. Nominalism and Realism: Volume 1: Universals and Scientific Realism. Cambridge University Press, 1978 г. – 164 p.

120. Baker, A. Indexing and mathematical explanations / A. Baker, M. Colyvan // Philosophia Mathematica. – 2011. – Vol. 9. – P. 323–334.

121. Baker, A. Mathematical explanation in science / A. Baker // British Journal for the Philosophy of Science. - 2009. - Vol. 60. - P. 611-633.

122. Balaguer, M. Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press, 1998. – 217 p.

123. Barnes, B. Scientific Knowledge and Sociological Theory. – London: Routledge and Keagan Paul, 1974. – 204 p.

124. Batterman, R.W. On the explanatory role of mathematics in empirical science / R.W. Batterman // British Journal for the Philosophy of Science. – 2010. – Vol. 61. – P. 1–25.

125. Benacerraf, P. Mathematical truth / P. Benacerraf // Philosophy of Mathematics: Selected Readings / P. Benacerraf, H. Putnam. – Cambridge: Cambridge University Press, 1983. – P. 401–421.

126. Bird, A. Kuhn and the Historiography of Science. In: Devlin W., Bokulich A. (eds) Kuhn's Structure of Scientific Revolutions – 50 Years On. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol 311. P. 23–38. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-13383-6_3.

127. Blass, A. The interaction between category theory and set theory / A. Blass // Mathematical Applications of Category Theory. – Providence, RI: American Mathematical Society, 1984. – P. 5–29.

128. Cantor, G. Gesammelte Abhandlungen. Edited by E. Zermelo P.p. vii, RM. 48. 1932. (Springer, Berlin). – 486 S.

129. Davies, B. Whither mathematics? / B. Davies // Notices of the American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 52, № 11. – P. 1350–1356.

130. Detlefsen, M. On interpreting Godel second theorem / M. Detlefsen // Journal of Philosophical Logic. – 1979. – Vol. 8, № 3. – P. 297–313.

131. Devitt, M. Realism and Truth / 2nd ed. – Oxford, UK; Cambridge, USA: Blackwell, 1991. – XII – 327 p.

132. Dingler, H.: Die Ergreifung des Wirklichen. Frankfurt am Main, 1969. – 234 S.

133. Ernest, P. The philosophy of mathematical education / P. Ernest. – London: The Flamer Press, 1991. – 344 p.

134. Francois, K., Van Kerkhove, B. Ethnomathematics and the philosophy of mathematics (education). 2010. URL: researchgate.net/publication /228394932_Ethnomathematics_and_the_Philosophy_ of_Mathematics_ Education.

135. Frege, G. Grundgesetze der Aritmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 2. Jena, 1902. – 253 S.

136. French, S. The reasonable effectiveness of mathematics: Partial structures and the application of group theory to physics / S. French // Synthese. – 2000. -Vol. 125, № 1-2. – P. 103–120.

137. Ginzburg, L. Aiming the «unreasonable effectiveness of mathematics» at ecology theory / L. Ginzburg, Ch. Jensen, J. Yule // Ecological Modelling. - 2007. –Vol. 207. – P. 356–362.

138. Gödel, K. What is Cantor’s Continuum Problem? Philosophy of Mathematics, eds. P. Benacerraf & H. Putnam. Cambridge University Press. 1983. – P. 470 – 485

139. Gonthier, G. Formal proof - the four-color theorem / G. Gonthier // Notices of the American Mathematical Society. – 2008. – Vol. 55. – P. 1382–1393.

140. Hamming, R.W. The unreasonable effectiveness of mathematics / R.W. Hamming // The American Mathematical Monthly. – 1980. – Vol. 87, № 2. – P. 81–90.

141. Harrison, J. Formal proof - theory and practice / J. Harrison // Notices of the American Mathematical Society. 2008. Vol. 55, № 11. – P. 1413-1414.

142. Hellman, G. Mathematical pluralism: the case of smooth infinitesimal analysis / G. Hellman // Journal of Philosophical Logic. 2006. Vol. 35. – P. 621–651.

143. Hersh, R. The fresh wind in the philosophy of mathematics // Amer. Math. Monthly. - 1995. - Aug.-Sept. - P. 590–591.

144. Hilbert, D. Naturerkennen und Logik // David Hilbert, Naturwissenschaften (1930-11-28), S. 959-963. [Электронный ресурс]. – https://rschr.de/Htm/David_Hilbert_Naturerkennen_und_Logik.htm (Дата обращения 07.07.2021)

145. Kitcher, Ph. The nature of mathematical knowledge. - N.Y., 1984. – 368 p.

146. Kuhn, Thomas S. The Essential Tension, Selected studies in scientific tradition and change. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. – 336 p.

147. Lowver, F.W. An Elementary Theory of The Category of Sets (Long Version) With Commentary. Theory and Applications of Categories, No. 11, 2005, P. 1–35.

148. Maddy, P. Realism in Mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1990. – 204 p.

149. Maddy, P. Set and numbers / P. Maddy // Nous. - Bioomington, 1981. -Vol. 15, № 4. – P. 495-511.

150. Mathematics: People, Problems, Results. 3 Volumes. Wadsworth International Inc., Brigham Young Univ., 1984. – 292 p.

151. Mostowski A. Thirty years of foundational studies. Lectures on the development of mathematical logic and the study of the foundations of mathematics in 1930–1964; second printing, Helsinki 1967. – 180 pp.

152. Mumford, D. Why I am a Platonist / D. Mumford // Newsletter of the European Mathematical Society. - 2008. - December. - P. 27-30.

153. Putnam, H. Mind, Language and Reality // Philosophical Papers. Vol. 2. Cambridge (MA) – L.–N. Y., 1984. – 457 p.

154. Putnam, H. Philosophy of logic / H. Putnam // Mathematics Matter and Method: Philosophical Papers. - Cambridge: Cambridge University Press, 1979. -Vol. 1. – P. 323-359.

155. Putnam, H. What is mathematical truth? / H. Putnam // New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology. - Princeton: Princeton University Press, 1998. – P. 50-65.

156. Quine, W. V. O. “Success and Limits of Mathematization,” in his: Theories and Things. Harvard University Press. –1981. - P. 148–155

157. Resnik, M. Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press.1997. – 285 p.

158. Robertson, N. The Four-color theorem / N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour, R. Thomas // Journal of Combinatorial Theory. Series B. - 1997. -Vol. 70. – P. 2-44.

159. Russel, B., Whitehtad A.N. Principia mathematica, Cambridge, Volume I. Second Edition. Cambridge, University Press, 1925. – 674 p.

160. Russell, B. (1919) Introduction to Mathematical Philosophy, George Allen and Unwin. (Reprinted: Routledge, 1993). – 261 p.

161. Shapiro, Stewart. Philosophy of Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 2000. – 272 p.

162. Shor, P.W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer / P.W. Shor // SIAM Journal on Computing. - 1997. –Vol. 26, № 5. - P. 1484-1509.

163. Steiner, M. The applicability of mathematics as a philosophical problem / M. Steiner. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998. – 223 p.

164. Thurston, W.P. On proof and progress in mathematics / W.P. Thurston // Bulletin of American Mathematical Society. - 1994. - Vol. 30. - P. 161-177.

165. Unger, Peter. Empty Ideas: A Critique of Analytic Philosophy. Oxford University Pres. – 272 p.